НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

Конаровський Віталій Васильович

УДК 519.21

СИСТЕМА ВЗАЄМОДІЮЧИХ ЧАСТИНОК ЗІ ЗМІННОЮ МАСОЮ

01.01.05 — теорія ймовірностей та математична статистика

Дисертація

на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Дороговцев Андрій Анатолійович
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ – 2011

ЗМІСТ

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$	– множина натуральних чисел;
$\mathbb{Z}$	– множина цілих чисел;
$\mathbb{R}$	– множина дійсних чисел;
$\mathbb{R}^+$	– множина дійсних невід'ємних чисел;
$\mathbb{T}$	– відрізок $[0, T]$ або $[0, +\infty)$;
$\mathrm{Law}\{\xi\}$	– розподіл випадкового елемента ξ;
$\mathrm{C}(A)$	– множина неперервних функцій на A;
$\widetilde{\mathrm{C}}(\mathbb{T})$	– множина неперервних функцій на $\mathbb{T}$, які при $t = 0$ рівні нулю;
$\mathrm{C}_0(E^n)$	– множина неперервних функцій на $E^n \subset \mathbb{R}^n$, що зануляються на нескінченності;
$\mathrm{C}_0^\alpha(E^n)$	– множина гельдерових функцій на $E^n \subset \mathbb{R}^n$ з показником α, що зануляються на нескінченності;
$\mathrm{C}^m(\mathbb{R}^n)$	– множина m-раз неперервно диференційовних функцій на $\mathbb{R}^n$;
$\mathrm{C}_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^n)$	– множина неперервних симетричних відносно усіх перестановок координат функцій на $\mathbb{R}^n$, які зануляються на нескінченності;
$\mathrm{C}_C(\mathbb{R})$	– множина неперервних функцій на $\mathbb{R}$ з компактним носієм;
c	– простір збіжних послідовностей;
$\mathcal{B}(X)$	– σ-алгебра борелевських множин на метричному просторі X;
$\langle f, \mu \rangle$	– інтеграл від функції f по мірі μ;
δ_x	– ймовірносна міра, у якої вся маса зосереджена в точці x;
∂A	– межа множини A;

A^c – доповнення до множини A;

$\overline{A}$ – замикання множини A;

$\#A$ – кількість елементів у множині A;

м.н. – майже напевно.

ВСТУП

Актуальність теми. Дана робота присвячена системам взаємодіючих частинок, які рухаються у випадковому середовищі. Яскравим прикладом системи взаємодіючих частинок на дійсній прямій є модель, запропонована у роботі Arratia R. A. [1]. Ця модель полягає в наступному: частинки стартують з усіх точок дійсної прямої, рухаються незалежно до моменту зіткнення, потім склеюються і рухаються разом. Основною характерною ознакою такої системи є те, що склеювання не змінює характер руху частинок, тобто їхня дифузія завжди дорівнює одиниці. Потрібно відмітити, що потік Арратья (математична модель побудована у [1]) має застосування у теорії турбулентності та статистичній механіці. Наприклад, у роботі [2] показано, що цей потік виникає у моделі, що отримується з композиції незалежних випадкових конформних відображень, яка в свою чергу має застосування при вивченні турбулентності [3].

У моделі, що розглядається в дисертаційній роботі, ми враховуватимемо масу частинок, яка впливатиме на їхній рух. Система взаємодіючих частинок зі склеюванням, які мають масу, що змінюється за певним законом, вивчалась авторами Dawson D. A., Li Z. H., Wang H., Zhou X. [4, 5, 6, 7]. Однак у цій моделі частинки переносять деяку масу і ця маса не впливає на їхній рух. Ми ж вважатимемо, що дифузія і маса зв'язані між собою. Грубо кажучи, чим важча частинка, тим "повільніше" вона рухатиметься.

Отже, у даній роботі розглядається наступна модель дифузійних частинок на прямій. Частинки починають свій рух зі скінченної або зліченної множини точок прямої і рухаються незалежно одна від одної до моменту зустрічі. Кожна частинка має масу, яка обернено пропорційна квадрату її дифузії. Зустрівшись, частинки склеюються, а їхня маса сумується, тобто нова частинка має масу, рівну сумі мас частинок, з яких вона утворилась.

Відмітимо, що модель частинок, у яких маса впливає на рух, розглядалась авторами Weinan E., Rykov Yu. G., Sinai Ya. G. у роботі [8]. У цій моделі частинки мають масу і швидкість. Їхній рух підпорядковується законам збереження маси та інерції. У нас же частинки мають дифузію (швидкість рівна нескінченності).

Одним з основних питань, що розглядається у роботі, є існування системи процесів, яка описує рух взаємодіючих частинок змінної маси. Оскільки наші частинки при зіткненні склеюються, тобто взаємодія між ними сингулярна, то ми не можемо задати систему процесів, що описують еволюцію частинок, за допомогою стохастичних диференціальних рівнянь для досить великого класу взаємодіючих частинок, що переносять масу, як це зроблено у роботі [9]. Також ми не можемо піти тим же шляхом, що й автори робіт [10, 11], а саме: маючи генератор (або напівгрупу) процесу, який задає рух однієї частинки, побудувати генератор (або напівгрупу) для всієї кількості частинок. Це зв'язано з тим, що довільна підсистема залежить від усіх частинок системи. У зв'язку з цим нам доводиться, використовуючи мартингальні методи, будувати математичну модель конструктивно для скінченного випадку частинок і переходити до границі (коли кількість частинок прямує до нескінченності) для нескінченного числа частинок, що нагадує процедуру термодинамічної границі у фізиці [12].

Також у роботі перевіряється марковська властивість побудованої системи процесів і знаходиться асимптотична поведінка окремої частинки на нескінченності, причому основним моментом у знаходженні асимптотик є те, що довільні дві частинки нашої моделі склеюються, за виділений проміжок часу з меншою ймовірністю, ніж дві броунівські.

Підсумовуючи все вище сказане, у дисертаційній роботі вперше побудована система процесів, яка описує поведінку скінченного та зліченного числа дифузійних частинок на дійсній прямій, у яких є маса, що впливає на коефіцієнт дифузії. Ці частинки рухаються незалежно до моменту зіткнення, потім склеюються і їхня маса сумується. Встановлена марковська властивість цієї системи процесів і досліджена асимптотична поведінка траєкторії окремої частинки та її маси на нескінченності.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в Інституті математики НАН України у відділі теорії випадкових процесів у рамках державної теми № 0106U001121 "Аналітичні та асимптотичні методи дослідження складних стохастичних систем". Також частина роботи виконана в рамках спільного наукового проекту НАН України – Російського фонду фундаментальних досліджень "Асимптотична поведінка стохастичних потоків", державний реєстраційний номер 0108U003689, спільного наукового проекту НАН України – Російського фонду фундаментальних досліджень "Асимптотична поведінка стохастичних потоків", етап 2 "Граничні теореми для потоків із сингулярностями", державний реєстраційний номер 0109U004285 та спільного проекту Державного фонду фундаментальних досліджень – Російського фонду фундаментальних досліджень "Стохастичні потоки із сингулярною взаємодією".

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є побудова математичної моделі нескінченної системи дифузійних частинок змінної маси із сингулярною взаємодією, а також дослідження її властивостей. Ця мета включає в себе наступні завдання:

- побудова випадкових процесів у різних метричних просторах, які є математичним описом моделі нескінченної системи дифузійних частинок змінної маси із сингулярною взаємодією;
- встановлення марковської властивості цих процесів і опис їхніх генераторів у термінах проблеми мартингалів;
- вивчення асимптотичної поведінки окремої частинки і її маси на нескінченності.

Об'єкт і предмет дослідження. Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є модель дифузійних частинок на дійсній прямій, у яких є маса, що впливає на коефіцієнт дифузії. Частинки рухаються незалежно до моменту зіткнення, після чого склеюються, сумуючи свою масу.

Предметами дослідження є випадкові процеси, що задають траєкторії взаємодіючих частинок, мірозначний процес, який описує еволюцію маси у всій системі, генератори цих випадкових процесів, простори неспадних послідовностей та цілочисельних локально скінченних мір на прямій, а також випадкові точкові міри, у яких ймовірносний розподіл стаціонарний відносно зсуву.

Методи дослідження. У роботі використані методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів та теорії марковських процесів.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну і виносяться на захист, такі:

- побудовано випадковий процес у просторі $E^n \subset \mathbb{R}^n$, який описує поведінку скінченного числа взаємодіючих дифузійних частинок на прямій, у яких є маса, що впливає на коефіцієнт дифузії. Частинки починають рух зі скінченної множини точок, рухаються незалежно до моменту зустрічі, а потім склеюються і їхня маса сумується, після чого коефіцієнт дифузії змінюється обернено пропорційно кореню квадратному маси. Перевірено марковську властивість такого процесу, знайдено вигляд генератора і розв'язано для нього проблему мартингалів;

- знайдено умови на початковий розподіл маси, що забезпечують існування нескінченної системи дифузійних частинок змінної маси із сингулярною взаємодією;
- вивчено випадок випадкового старту, коли початковий розподіл маси частинок є стаціонарний; показано, що маса, яка переноситься частинками, також має стаціонарний розподіл у довільний фіксований момент часу;
- досліджено асимптотичну поведінку окремої частинки на нескінченності, яка суттєво відрізняється від загальновідомого закону повторного логарифма, та встановлено асимптотичні обмеження на ріст її маси;
- марковський процес, що задає систему дифузійних частинок змінної маси із сингулярною взаємодією, описано за допомогою проблеми мартингалів.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Вперше побудована модель дифузійних частинок зі склеюванням, які мають масу, що впливає на коефіцієнт дифузії. Виявлено якісно нові властивості частинок у цій моделі. Отриманні результати можуть мати застосування у математичних моделях турбулентності та у математичних моделях статистичної механіки.

Особистий внесок здобувача. Постановка задач і вибір методів дослідження належать науковому керівнику дисертанта доктору фізико-математичних наук, професору Дороговцеву А. А. Всі результати, представлені в дисертаційній роботі, отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на наступних конференціях та наукових семінарах:

- Науковій конференції "Ломоносовские чтения – 2008" (Севастополь, 4-11 квітня 2008 р.);
- Міжнародній конференції "Stochastic Analysis and Random Dynamical Systems" (Львів, 14-20 червня 2009 р.);
- Всеукраїнському науковому семінарі "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25-28 березня 2010 р.);
- Всеукраїнському науковому семінарі "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 23-28 лютого 2011 р.);
- Науковому семінарі "Исчисление Маллявена и его приложения" Інституту математики НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора Дороговцева А. А.;
- Науковому семінарі "Бесконечномерный анализ и стохастика" кафедри теорії функцій і функціонального аналізу механіко-математичного факультету Московського державного університету імені М. В. Ломоносова під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора Богачова В. І.;
- Науковому семінарі "Теорія випадкових процесів" кафедри математичного аналізу і теорії ймовірностей фізико-математичного факультету Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут" під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора Булдигіна В. В.;

- Науковому семінарі “Стохастичні диференціальні рівняння” кафедри загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора Кулініча Г. Л. та доктора фіз.-мат. наук, професора Станжицького О. М.;
- Науковому семінарі факультету прикладної математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора Черевка І. М.
- Науковому семінарі з теорії функцій та функціонального аналізу кафедри математичного аналізу факультету прикладної математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора Маслюченка В. К.
- Науковому семінарі “Методи стійкості та оптимізації складних динамічних систем” кафедри стохастичного та системного аналізу факультету прикладної математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора Ясинського В. К.

Публікації. Результати дисертації опубліковані в трьох статтях [13, 14, 15]:

1. *Конаровский В. В.* О бесконечной системе диффундирующих частиц со склеиванием / В. В. Конаровский // *Теория вероятностей и ее применения.* — 2010. — Т. 55, № 1. — С. 157–167.
2. *Конаровський В. В.* Система дифузійних частинок із склеюванням змінної маси / В. В. Конаровський // *Український математичний журнал.* — 2010. — Т. 62, № 1. — С. 90–103.

3. *Konarovskii V. V.* The martingale problem for a measure-valued process with heavy diffusion particles / V. V. Konarovskii // *Theory of stochastic processes.* — 2011. — Vol. 17, no. 1. — Pp. 50–60.

і в одному збірнику тез міжнародної конференції.

Структура й об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Основний текст дисертації займає 122 сторінки, список літератури — 4 сторінки і містить 32 найменувань.

Автор вдячний своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору Дороговцеву Андрію Анатолійовичу за поставлені задачі, корисні рекомендації та постійну підтримку на всіх етапах виконання цієї роботи.

Короткий зміст дисертації

У **першому** розділі дисертаційної роботи розглядається модель взаємодіючих дифузійних частинок на прямій. Частинки стартують із скінченної множини точок дійсної прямої і рухаються незалежно одна від одної до моменту зіткнення. Кожна частинка має масу, яка впливає на коефіцієнт дифузії. Зіткнувшись, частинки склеюються, а їхня маса сумується (відповідно змінюється дифузія). Відмітимо, що маса m та дифузія σ зв'язані рівністю

$$\sigma^2 = \frac{1}{m}.$$

У пункті 1.2 побудована система випадкових процесів, яка описує рух скінченного числа частинок змінної маси із сингулярною взаємодією. Позначимо

$$E^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_i \le x_{i+1}, \ i = 1, \dots, n-1\}$$

та

$$A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \ a_i > 0\}.$$

Теорема 1.2.1. *Для довільного $x \in E^n$ та $a \in A_n$ існує набір випадкових процесів $\{x_k(t), \ k = 1, \dots, n, \ t \ge 0\}$ таких, що:*

1°) *для довільного $k = 1, \dots, n$ процес $x_k(\cdot)$ — неперервний квадратично інтегровний мартингал відносно потоку σ-алгебр*

$$(\mathcal{F}_t)_{t \ge 0} = (\sigma(x_k(s), \ s \le t, \ k = 1, \dots, n))_{t \ge 0};$$

2°) $x_k(0) = x_k, \ k = 1, \dots, n$*;*

3°) *для довільних $l < k$ та довільного $t \ge 0$ виконується нерівність $x_l(t) \le x_k(t)$;*

4°) *для довільного $t \ge 0$ квадратична характеристика*

$$\langle x_k(\cdot) \rangle_t = \int_0^t \frac{ds}{m_k(s)},$$

де

$$m_k(t) = \sum_{i \in M_k(t)} a_i,$$

$$M_k(t) = \{i = 1, \ldots, n: \ \exists\, s \le t, \ x_k(s) = x_i(s)\};$$

5°) *сумісна характеристика*

$$\langle x_l(\cdot), x_k(\cdot)\rangle_t \, \mathbb{I}_{\{t < \tau_{l,k}\}} = 0,$$

де $\tau_{l,k} = \inf\{t: \ x_l(t) = x_k(t)\}$.

Умови 1°)–5°) однозначно визначають розподіл $(x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ *у просторі* $\big((\mathrm{C}(\mathbb{R}^+))^n, \ \mathcal{B}((\mathrm{C}(\mathbb{R}^+))^n)\big)$.

Отримана система процесів є шуканою. Справді, умова 1°) означає, що частинки мають дифузію, яка змінюється згідно умови 4°), а саме: після склеювання їхня маса сумується і дифузія змінюється обернено пропорційно кореню квадратному маси. Умови 2°) та 3°) відповідають за старт і упорядкованість частинок під час руху, а 5°) вказує на незалежну поведінку до моменту зіткнення. Відмітимо, що ефект склеювання частинок не закладений у жодну з умов 1°)–5°), однак ця властивість є прямим наслідком 1°) та 3°).

Лема 1.2.2. *Нехай* y_1, y_2 *— неперервні мартингали відносно спільної фільтрації* $(\mathcal{S}_t)_{t\ge 0}$. *Якщо* $y_1(t) \le y_2(t)$ *для всіх* $t \in [0, T]$, *то*

$$(y_2(t) - y_1(t))\, \mathbb{I}_{\{t > \sigma\}} = 0,$$

де $\sigma = \inf\{t: \ y_1(t) = y_2(t)\} \wedge T$.

Означення 1.2.1. *Для довільного фіксованого* $x \in E^n$ *випадковий процес* $X^a_\cdot(x) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$, *заданий на* $[0, +\infty)$ *зі значеннями в* E^n, *називатимемо процесом важких дифузійних частинок в* E^n, *якщо він задовольняє умови 1°)–5°) теореми.*

У доведенні теореми 1.2.1 система процесів $\{x_k(t), \ k = 1, \ldots, n, \ t \ge 0\}$ будується конструктивно, зі шматків траєкторій сукупності незалежних стандартних вінерівських процесів $\{w_k,\ k = 1,\ldots,n\}$. На ідейному рівні опишемо алгоритм побудови нашої системи. Нехай ми маємо n броунівських частинок (їхні траєкторії описують процеси $x_k + \frac{w_k(\cdot)}{\sqrt{a_k}}$, $k = 1,\ldots,n$), кожна з яких має мітку від 1 до n. Задамо ці мітки вектором $p = (p_1,\ldots,p_n)$, який є перестановкою елементів $(1,\ldots,n)$. Коли дві або більше частинки зіткнуться, то після зіткнення залишаємо частинку з меншою міткою, "стискаючи" її траєкторію, а решту частинок "вбиваємо". Отримана система процесів і є шуканою. Слід відмітити, що для скінченної системи вектор p не відіграє жодної ролі, а саме: розподіл $(x_1(\cdot),\ldots,x_n(\cdot))$ від p не залежить. Однак у другому розділі при вивченні нескінченної системи частинок саме певний вибір p дасть змогу перейти від скінченної системи до нескінченної за допомогою граничного переходу.

Правило, яке системі $\{x_k + w_k(\cdot),\ k = 1,\ldots,n\}$ ставить у відповідність систему $\{x_k(\cdot);\ k = 1,\ldots,n\}$, позначимо через $\widehat{F}_n^{a,p}$. За допомогою цього відображення у параграфі 1.3 побудовано сім'ю процесів важких дифузійних частинок $X^a_{s,s+\cdot}(x)$ одночасно для всіх точок $x \in E^n$, яка володіє еволюційною властивістю

$$X^a_{r,t}(X^a_{s,r}(x)) = X^a_{s,t}(x) \text{ м.н.} \quad s < r < t.$$

Означення 1.3.1. *Сім'ю* $\mathrm{C}_{E^n}([s,\infty))$*-значних випадкових процесів* $\{X^a_{s,\cdot}(x),\ x \in E^n\}$, $s \geq 0$, *називатимемо потоком частинок зі склеюванням, якщо для довільного* $s \geq 0$ *відображення*

$$X^a_{s,\cdot} : E^n \times \Omega \to \mathrm{C}_{E^n}([s,\infty))$$

є вимірним і виконуються наступні умови

1) *для довільних* $s < r < t$ *і* $x \in E^n$ $X^a_{r,t}(X^a_{s,r}(x)) = X^a_{s,t}(x)$ *м.н.;*
2) *для довільних* $t_1 < \ldots < t_N$ *сім'я* $\{X^a_{t_i,t_{i+1}},\ 1 \leq i \leq N-1\}$ *є незалежною;*

3) для довільного s та довільних $x^1, \ldots, x^m \in E^n$ розподіл $(X^a_{s,s+\cdot}(x^1), \ldots, X^a_{s,s+\cdot}(x^m))$ співпадає з розподілом $(\widehat{F}^{a,p}_n(x^1 + w(\cdot)), \ldots, \widehat{F}^{a,p}_n(x^m + w(\cdot)))$, де w — деякий стандартний вінерівський процес в $\mathbb{R}^n$ та $p = (1, \ldots, n)$.

Твердження 1.3.1. *Для довільного $a \in A_n$ існує потік частинок зі склеюванням $\{X^a_{s,t}(x),\ x \in E^n,\ s,t \in [0,+\infty),\ s \leq t\}$.*

На основі еволюційної властивості потоку частинок зі склеюванням встановлюється марковська властивість процесу важких дифузійних частинок $X^a_\cdot(x)$.

Нехай $\mathrm{C}_0(E^n)$ — простір неперервних функцій на E^n, що зануляються на нескінченності, з супремум нормою, яку позначатимемо $\|\cdot\|$. Для довільного $t \geq 0$, $x \in E^n$ та функції $f \in \mathrm{C}_0(E^n)$ візьмемо

$$T_t f(x) = \mathbb{E}\, f(X^a_t(x)).$$

У пункті 1.4 перевіряється, що напівгрупа $\{T_t,\ t \geq 0\}$ є фелерівською і знаходиться вигляд її інфінітезимального оператора.

Твердження 1.4.1. *$\{T_t,\ t \geq 0\}$ задовольняє наступні властивості:*

1) $T_t : \mathrm{C}_0(E^n) \to \mathrm{C}_0(E^n)$;

2) $T_t 1 = 1$;

3) $T_t T_s f(x) = T_{t+s} f(x)$;

4) для довільного $f \in \mathrm{C}_0(E^n)$ $\|T_t f - f\| \to 0$ при $t \to 0$;

5) $\|T_t f\| \leq \|f\|$.

Нехай $\mathfrak{S}^n = \{K = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) : \alpha_i \subseteq \{1, \ldots, n\},\ i = 1, \ldots, p,\ p = 1, \ldots, n\}$ — сукупність розбиттів множини $\{1, \ldots, n\}$ таких, що

1) $l < k$ для довільного $k \in \alpha_i$, $l \in \alpha_{i+1}$ та $i \in \{1, \ldots, n-1\}$;

2) $\bigcup\limits_{i=1}^{p} \alpha_i = \{1, \ldots, n\}$.

Символом $|K|$ позначатимемо число p, а $K(i)$ — елемент $\alpha \in K$, для якого $i \in \alpha$. Візьмемо

$$S_K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in E^n : \ x_i = x_{i+1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow K(i) = K(i+1), \ i = 1, \ldots, n-1\}$$

та

$$\mathfrak{S}_K^- = \{(\beta_1, \ldots, \beta_q) : \ q = |K| - 1, \ \forall\, i \ \exists\, j \ \beta_i \supseteq K(j)\}.$$

Для розбиття $K \in \mathfrak{S}^n$ позначатимемо символом f_K звуження n-значної функції f на множину S_K^n, тобто

$$f_K(y_1, \ldots, y_{|K|}) = f\big|_{S_K^n}(x_1, \ldots, x_n),$$

де $x \in S_K^n$, тобто $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_1, \ldots, y_{|K|}, \ldots, y_{|K|})$.

Нехай $\widehat{\mathrm{C}}(E^n)$ — сукупність функцій f із $\mathrm{C}_0(E^n)$ таких, що для довільного $K = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathfrak{S}^n$ функція f_K двічі неперервно диференційовна на $E^{|K|}$ і похідна до другого порядку включно може бути продовжена до неперервної функції на $S_K^n \cup \left(\bigcup_{P \in \mathfrak{S}_K^-} S_P^n\right)$.

Позначимо $\mathfrak{D}_{E^n}$ — сукупність функцій f із $\widehat{\mathrm{C}}(E^n)$ таких, що для будь-якого $K = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathfrak{S}^n$ і для довільного $P^i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i \cup \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_p) \in \mathfrak{S}_K^-$ справедливо

$$\Delta_K f_K\big|_{y_i = y_{i+1}} = \Delta_{P^i} f_{P^i}. \tag{1.17}$$

Тут

$$\Delta_K f_K(y_1, \ldots, y_p) = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\#\alpha_j} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} f_K(y_1, \ldots, y_p).$$

На множині $\mathfrak{D}_{E^n}$ задамо оператор $\mathfrak{G}_{E^n}$

$$\mathfrak{G}_{E^n} f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} \Delta_n f(x_1, \ldots, x_n),$$

де Δ_n – n-вимірний оператор Лапласа.

Теорема 1.4.1. *Замикання $\overline{\mathfrak{G}}_{E^n}$ лінійного оператора $\mathfrak{G}_{E^n}$ в просторі $\mathrm{C}_0(E^n)$ є генератором напівгрупи $\{T_t, \ t \geq 0\}$.*

Другий розділ дисертаційної роботи присвячений моделі зліченного числа частинок змінної маси із сингулярною взаємодією.

Основним результатом пункту 2.1 є теорема про існування нескінченної системи процесів, яка є математичним описом моделі частинок, що розглядається.

Теорема 2.1.1. *Нехай послідовності дійсних чисел* $\{x_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *та* $\{a_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *задовольняють наступні умови:*

$1^\star$) *для довільного* $k \in \mathbb{Z}$ $\quad a_k > 0, \quad x_k < x_{k+1}$*;*

$2^\star$) *існують послідовність* $\{n_i,\ i \in \mathbb{Z}\}$ *та стала* $C > 0$ *такі, що для будь-якого* $i \in \mathbb{Z}$ $a_{n_i+1} \wedge a_{n_i} \geq C$, $x_{n_i+1} - x_{n_i} \geq C$, $n_0 = 0$.

Тоді існує система випадкових процесів $\{x_k(t),\ k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$ *така, що:*

1°) *для довільного* $k \in \mathbb{Z}$ *процес* $x_k(\cdot)$ *— неперервний квадратично інтегровний мартингал відносно потоку* σ*-алгебр*

$$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} = (\sigma(x_k(s),\ s \leq t,\ k \in \mathbb{Z}))_{t \geq 0}\,;$$

2°) $x_k(0) = x_k,\ k \in \mathbb{Z}$*;*

3°) *для довільних* $l < k$ *та довільного* $t \geq 0$ *виконуєтьcя нерівність* $x_l(t) \leq x_k(t)$*;*

4°) *для довільного* $t \geq 0$ *квадратична характеристика*

$$\langle x_k(\cdot)\rangle_t = \int\limits_0^t \frac{ds}{m_k(s)},$$

де

$$m_k(t) = \sum_{i \in M_k(t)} a_i,$$

$$M_k(t) = \{i \in \mathbb{Z}:\ \exists\ s \leq t,\ x_k(s) = x_i(s)\};$$

5°) *сумісна характеристика*

$$\langle x_l(\cdot), x_k(\cdot)\rangle_t\ \mathbb{I}_{\{t<\tau_{l,k}\}} = 0,$$

де $\tau_{l,k} = \inf\{t:\ x_l(t) = x_k(t)\}$.

Умови 1°)–5°) *однозначно визначають розподіл* $(\ldots, x_{-n}(\cdot), \ldots, x_n(\cdot), \ldots)$ *у просторі* $\big((\mathrm{C}(\mathbb{R}^+))^{\mathbb{Z}},\ \mathcal{B}((\mathrm{C}(\mathbb{R}^+))^{\mathbb{Z}})\big)$.

Як бачимо, дана теорема встановлює достатні умови на розподіл маси частинок в момент старту, за яких існує математична модель системи взаємодіючих частинок зі склеюванням. Потрібно відмітити, що в силу умови $2^\star$) сумарна маса частинок в системі рівна нескінченності.

Означення 2.1.1. *Сукупність процесів* $\{x_k(t),\ k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$, *яка задовольняє умови* 1°)–5°) *теореми 2.1.1, називатимемо системою важких дифузійних частинок.*

Для доведення теореми встановлюється одна властивість системи незалежних стандартних вінерівських процесів.

Лема 2.1.2. *Нехай* $\{w_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ *– сукупність незалежних стандартних вінерівських процесів, послідовності дійсних чисел* $\{y_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ *та* $\{b_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ *такі, що*

1) *для довільного* $k \in \mathbb{N}$ $y_k < y_{k+1}$;
2) *існує* $C > 0$ *таке, що для будь-якого* $k \in \mathbb{N}$ $b_k \geq C$, $y_{k+1} - y_k \geq C$.

Позначимо

$$\xi_k = \max_{t\in[0,T]} \left\{ y_k + \frac{1}{\sqrt{b_k}} w_k(t) \right\},$$
$$\eta_k = \min_{t\in[0,T]} \left\{ y_k + \frac{1}{\sqrt{b_k}} w_k(t) \right\}.$$

Тоді для довільного $\delta \in (0, \frac{C}{2})$

$$\mathbb{P}\left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \max_{k=1,\ldots,n} \xi_k \leq y_n + \frac{C}{2},\ \eta_{n+1} > y_n + \frac{C}{2} + \delta \right\} \right\} = 1.$$

Позначимо

$$(x^n_{-n}(\cdot), \ldots, x^n_n(\cdot)) = \widehat{F}^{a^n, p^n}_{2n+1}(x_{-n} + w_{-n}, \ldots, x_n + w_n). \tag{2.1}$$

За рахунок останньої леми та спеціального вибору міток p^n можна перейти до границі в послідовності $(x^n_{-k}(\cdot))_{n\geq|k|}$ при $n\to\infty$. Система граничних процесів задовольняє умови 1°)—5°) теореми 2.1.1.

У наступному пункті дисертаційної роботи перевіряється, що побудована система процесів є строго марковською у деякому метричному просторі. З урахуванням умови 3°) та умов $1^\star$), $2^\star$) цим метричним простором є множина неспадних послідовностей $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ таких, що

$$\lim_{k\to\pm\infty}\frac{x_k}{k}=1 \tag{2.4}$$

з метрикою

$$\rho((x_k)_{k\in\mathbb{Z}},(y_k)_{k\in\mathbb{Z}})=\max_{k\in\mathbb{Z}}\frac{|x_k-y_k|}{1+|k|}.$$

Позначатимемо цю множину символом $\mathcal{M}$.

Означення 2.2.1. *Випадковий процес* $\{X_t,\ t\geq 0\}$ *зі значеннями в* $\mathcal{M}$ *називається процесом важких дифузійних частинок в* $\mathcal{M}$*, якщо існує система важких дифузійних частинок* $\{x_k(t),\ k\in\mathbb{Z},\ t\geq 0\}$ *така, що* $a_k=1$*,* $k\in\mathbb{Z}$*, і для довільного* $t\geq 0$ $X_t=(x_k(t))_{k\in\mathbb{Z}}$.

З умови (2.4), а також того, що частинки за скінченний проміжок часу не встигають сильно відхилитись від свого початкового положення, випливає існування неперервного процесу важких дифузійних частинок в $\mathcal{M}$, який стартував з довільної наперед заданої точки $\mathcal{M}$.

Твердження 2.2.1. *Для довільного* $x\in\mathcal{M}$ *існує неперервний процес важких дифузійних частинок в* $\mathcal{M}$ $\{X_t(x),\ t\geq 0\}$ *такий, що* $X_0(x)=x$.

Основним результатом параграфу 2.2 є наступна теорема.

Теорема 2.2.1. *Процес важких дифузійних частинок в* M *є строго марковським процесом.*

Оскільки процес важких дифузійних частинок в $\mathcal{M}$ є строго марковським, то в пункті 2.3 знайдено генератор цього процесу і розв'язано проблему мартингалів. Отже, візьмемо

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{M}} = \{f \circ \pi_k\big|_{\mathcal{M}} : \ f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^{2k+1}), \ f \text{ має компактний носій}, \ k \in \mathbb{N}\}.$$

На множині $\mathfrak{D}_{\mathcal{M}}$ задамо оператор

$$\mathfrak{G}_{\mathcal{M}} \widetilde{f}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=-k}^{k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\pi_k x) \frac{\mathbb{I}_{\{x_i = x_j\}}}{\sum\limits_{l \in \mathbb{Z}} \mathbb{I}_{\{x_i = x_l\}}},$$

де $\widetilde{f} = f \circ \pi_k$ та $\pi_k x = (x_{-k}, \ldots, x_k)$.

Теорема 2.3.1. *Процес важких дифузійних частинок є єдиним розв'язком $(\mathfrak{G}_{\mathcal{M}}, \mathfrak{D}_{\mathcal{M}})$-проблеми мартингалів.*

У пункті 2.4 вивчається існування системи важких дифузійних частинок для випадку, коли старт випадковий і задовольняє деякій умові стаціонарності. Слід відмітити, що розподіл частинок на прямій інколи зручно задавати за допомогою мір вигляду $\mu = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{x_k}$, де x_k та a_k положення та маса k-тої частинки. Такі міри називаються точковими мірами.

Означення 2.4.1. *Точковою мірою на $\mathbb{R}$ називатимемо міру $\mu = \sum\limits_{k \in I} a_k \delta_{x_k}$, де $a_k > 0$, $x_k \in \mathbb{R}$, $x_l \neq x_k$ при $l \neq k$ і $I \subseteq \mathbb{Z}$.*

Поряд з μ будемо розглядати міру $\mu^* = \sum\limits_{k \in I} \delta_{x_k}$.

Нехай $\mathfrak{N}$ — множина точкових мір μ на $\mathbb{R}$, що $\mu^*(B) < \infty$ для довільної обмеженої множини $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Сформулюємо означення стаціонарної точкової міри.

Означення 2.4.2. *Стаціонарною точковою мірою μ на $\mathbb{R}$ називатимемо відображення*

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \Omega \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\},$$

яке має наступні властивості:

1) *для будь-якого* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mu(B, \cdot)$ *— випадкова величина;*

2) $\mu(\cdot, \omega) \in \mathbb{N}, \ \forall \, \omega \in \Omega$*;*

3) *для будь-яких* $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *і* $h \in \mathbb{R}$

$$(\mu(B_1), \ldots, \mu(B_n)) \stackrel{d}{=} (\mu(B_1 + h), \ldots, \mu(B_n + h)).$$

Нехай в момент старту розподіл частинок на прямій є стаціонарним. У теоремі 2.4.1 встановлюється існування сукупності процесів, яка є математичним описом руху даної системи частинок із взаємодією. Існування такої сукупності процесів ґрунтується на одній властивості стаціонарних точкових мір.

Лема 2.4.1. *Нехай* $\mu = \sum\limits_{k \in I} a_k \delta_{x_k}$ *— стаціонарна точкова міра така, що* $\mu \neq 0$ *м.н., для довільних* $l, k \in I$ *з того, що* $l < k$ *і* $l \leq i \leq k$*, випливає* $x_l < x_k$ *та* $i \in I$*. Тоді з ймовірністю 1* $I = \mathbb{Z}$ *і послідовності* $\{x_k, \ k \in \mathbb{Z}\}$ *та* $\{a_k, \ k \in \mathbb{Z}\}$ *задовольняють умови* $1^\star$*),* $2^\star$*) теореми 2.1.1.*

Теорема 2.4.1. *Нехай* $\mu = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{x_k}$ *— стаціонарна точкова міра на* $\mathbb{R}$ *зі скінченною кількістю атомів на кожному відрізку і* $\mu \neq 0$*. Тоді існує система процесів* $\{x_k(t), \ k \in \mathbb{Z}, \ t \geq 0\}$*, яка задовольняє наступні умови:*

1°) *для довільного* $k \in \mathbb{Z}$ *процес* $x_k(\cdot) - x_k$ *— неперервний квадратично інтегровний локальний мартингал відносно потоку* σ*-алгебр*

$$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} = (\sigma(x_k(s), \ s \leq t, \ k \in \mathbb{Z}))_{t \geq 0};$$

2°) $x_k(0) = x_k, \ k \in \mathbb{Z}$*;*

3°) *для довільних* $l < k$ *та довільного* $t \geq 0$ *виконується нерівність* $x_l(t) \leq x_k(t)$*;*

4°) *для довільного* $t \geq 0$ *квадратична характеристика*

$$\langle x_k(\cdot) - x_k \rangle_t = \int\limits_0^t \frac{ds}{m_k(s)},$$

де

$$m_k(t) = \sum_{i \in M_k(t)} a_i,$$

$$M_k(t) = \{i \in \mathbb{Z} : \ \exists \ s \le t, \ x_k(s) = x_i(s)\};$$

5°) *сумісна характеристика*

$$\langle x_l(\cdot) - x_l, x_k(\cdot) - x_k \rangle_t \ \mathbb{I}_{\{t < \tau_{l,k}\}} = 0,$$

де $\tau_{l,k} = \inf\{t : \ x_l(t) = x_k(t)\}$.

Зауваження 2.4.3. *У даній теоремі слово "мартингал" замінене на "локальний мартингал" лише по тій причині, що* x_k, $k \in \mathbb{Z}$, *може не мати першого моменту.*

У останньому пункті другого розділу вивчені асимптотичні властивості системи важких дифузійних частинок у випадку, коли частинки стартували з цілих точок прямої з одиничними масами.

Ключевим моментом у доведенні усіх нижче перерахованих властивостей є те, що зустріч двох частинок із нашої системи до фіксованого моменту t відбувається з меншою ймовірністю, аніж зустріч двох звичайних броунівських.

Нехай $\{(x_k(t))_{k \in \mathbb{Z}}, \ t \ge 0\}$ — процес важких дифузійних частинок в $\mathcal{M}$ та w, w_1, w_2 — незалежні стандартні вінерівські процеси. Позначимо для $s \in \mathbb{R}$

$$\sigma_s = \inf\{t : \ w_1(t) - w_2(t) = s\}. \tag{2.14}$$

Лема 2.5.2. *Для довільних* $k, l \in \mathbb{Z}$, $t \ge 0$, $a > 0$ *виконується*

$$\mathbb{P}\{\tau_{k,l} \le t\} \le \mathbb{P}\{\sigma_{x_l - x_k} \le t\},$$

$$\mathbb{P}\left\{\min_{t \in [0,T]} x_k(t) \le x_k(0) - a\right\} \le \mathbb{P}\left\{\min_{t \in [0,T]} w(t) \le -a\right\}$$

та

$$\mathbb{P}\left\{\max_{t \in [0,T]} x_k(t) \ge x_k(0) + a\right\} \le \mathbb{P}\left\{\max_{t \in [0,T]} w(t) \ge a\right\}.$$

Траєкторія окремої частинки і її маса у випадку, коли $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$, задовольняють наступним асимптотичним властивостям.

Лема 2.5.3. *Для довільного цілого* k

$$\mathbb{P}\left\{\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{m_k(t)}{4\sqrt{t\,\ln\ln t}} \le 1\right\} = 1. \tag{2.15}$$

Лема 2.5.5. *Для довільного* $\varepsilon \in (0,1)$

$$\mathbb{P}\left\{\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{|x_0(t)|}{\sqrt{2t\,\ln\ln t}} = 0\right\} = 1,$$

$$\mathbb{P}\left\{\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{|x_0(t)|}{\sqrt[4]{t^{1-\varepsilon}}} = \infty\right\} = 1.$$

У **третьому** розділі дисертаційної роботи розглядається мірозначний процес у просторі локально скінченних цілочисельних мір, який описує еволюцію маси нескінченної кількості частинок, що склеюються і при склеюванні змінюють свою масу.

У пункті 3.1 вводиться метричний простір $\mathcal{H}$ локально скінченних цілочисельних мір на $\mathbb{R}$, які задовольняють граничні співвідношення

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mu([0,n))}{n} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\mu([-n,0))}{n} = 1. \tag{3.1}$$

Метрика на $\mathcal{H}$ задається наступним чином. Розглянемо множину неперервних відображень з $\mathbb{R}$ в $[0,1]$

$$\Phi^+ = \{\varphi_k^+,\ k \in \mathbb{N}\},$$

де $\varphi_k^+(x) = 0$ для $x \notin [0, k+1]$ та $\varphi_k^+(x) = 1$ для $x \in [\frac{1}{2}, k]$, $k \in \mathbb{N}$. Позначимо

$$\Phi^- = \{\varphi_k^- :\ \varphi_k^-(x) = \varphi_k^+(-x),\ x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Нехай $\mathrm{C}_C(\mathbb{R})$ — простір неперервних функцій на $\mathbb{R}$ з компактним носієм, а $\widetilde{Q} = \{g_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ — деяка підмножина цього простору така, що задовольняє наступну властивість: для довільної $f \in \mathrm{C}_C(\mathbb{R})$ знайдеться компакт $K_f \supset \operatorname{supp} f$ такий, що для будь-яких $\varepsilon > 0$ існує $g_k \in \widetilde{Q}$, носій якої лежить в K_f, і $\|f - g_k\| < \varepsilon$.

Візьмемо $Q = \widetilde{Q} \cup \{\varphi_k^+(x - k/2),\ k \in \mathbb{N}\}$. Для $\mu, \nu \in \mathcal{H}$ визначимо

$$d(\mu, \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left[|\langle f_k, \mu \rangle - \langle f_k, \nu \rangle| \wedge 1 \right],$$

де $\langle f, \mu \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx)$ та $Q = \{f_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

Визначимо для $\mu, \nu \in \mathcal{H}$

$$\gamma(\mu, \nu) = d(\mu, \nu) + \max_{k \geq 1} \frac{|\langle \varphi_k^-, \mu \rangle - \langle \varphi_k^-, \nu \rangle|}{k} + \max_{k \geq 1} \frac{|\langle \varphi_k^+, \mu \rangle - \langle \varphi_k^+, \nu \rangle|}{k},$$

де функції $\varphi_k^+,\ \varphi_k^-$ лежать в $\Phi^+,\ \Phi^-$ відповідно.

Лема 3.1.3. $(\mathcal{H}, \gamma)$ *є повним сепарабельним метричним простором.*

Насправді елементи $\mathcal{M}$ та $\mathcal{H}$ зв'язані між собою, про що свідчить наступна лема.

Лема 3.1.1. *Міра μ лежить в $\mathcal{H}$ тоді і тільки тоді, коли знайдеться елемент $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ із $\mathcal{M}$ такий, що $\mu = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{x_k}$.*

У зв'язку з цим за допомогою процесу важких дифузійних частинок в $\mathcal{M}$ у пункті 3.2 будується випадковий процес в $\mathcal{H}$, який описує еволюцію маси нашої системи частинок.

Означення 3.2.1. *Випадковий процес $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$ називатимемо процесом важких дифузійних частинок в $\mathcal{H}$, якщо існує $\{(x_k(t))_{k \in \mathbb{Z}},\ t \geq 0\}$ — процес важких дифузійних частинок в $\mathcal{M}$ такий, що*

$$\mu_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{x_k(t)}, \quad t \geq 0.$$

Твердження 3.2.1. *Для довільної цілочисельної міри $\mu \in \mathcal{H}$ існує неперервний процес важких дифузійних частинок в $\mathcal{H}$ $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$ такий, що $\mu_0 = \mu$.*

У пункті 3.3 розв'язується проблема мартингалів для мірозначного процесу, який задає рух скінченного числа частинок. Це пізніше дасть змогу розв'язати проблему мартингалів для процесу важких дифузійних частинок в $\mathcal{H}$.

Нехай

$$\mathcal{H}_n = \{\mu : \ \mu \ - \ \text{цілочисельна міра на } \mathbb{R}, \ \mu(\mathbb{R}) = n\}.$$

Розглядатимемо $\mathcal{H}_n$ як метричний простір з метрикою слабкої збіжності d_n. Визначимо на $\mathcal{H}_n$ мірозначний процес

$$\mu_t = \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k(t)}, \quad t \geq 0, \tag{3.7}$$

де $\{(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \ t \geq 0\}$ — процес важких дифузійних частинок в E^n. Позначимо

$$F_{\varphi,m} = \langle \varphi, \mu^{\otimes m} \rangle = \int \varphi(x_1, \ldots, x_m) \mu(dx_1) \ldots \mu(dx_m).$$

Нехай $\mathrm{C}_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^n)$ — клас неперервних функцій на $\mathbb{R}^n$, симетричних відносно усіх перестановок координат, що зануляються на нескінченності. Визначимо відображення

$$\Xi_n : \mathrm{C}_0(E^n) \to \mathrm{C}_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^n)$$

за наступним правилом

$$\Xi_n(f) = f\big|_{E^n}.$$

Розглянемо клас функцій

$$\Phi_n = \left\{ \varphi : \ \exists\, \widetilde{\varphi} \in \mathfrak{D}^0_{E^n} \ \exists\, K \in \mathfrak{S}^n \ \Xi_n(\widetilde{\varphi})\big|_{S^n_K} = \varphi \right\},$$

де

$$\mathfrak{D}^0_{E^n} = \{f \in \widehat{\mathrm{C}}(E^n) : \ f \ - \ \text{має компактний носій}\}.$$

Нехай
$$\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_n} = \text{ЛО}\left\{F_{\varphi,m}:\ \varphi\in\Phi_n,\ m\le n\right\}.$$

Для $F_{\varphi,m}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_n}$ позначимо

$$\mathfrak{G}_{\mathcal{H}_n} F_{\varphi,m}(\mu) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{\delta^2 F_{\varphi,m}(\mu)}{\delta\mu(x)\delta\mu(y)}\delta_x(dy)\mu(dx)+ \\ +\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d^2}{dx^2}\frac{\delta F_{\varphi,m}(\mu)}{\delta\mu(x)}\mu^*(dx). \quad (3.9)$$

Тут
$$\frac{\delta F_{\varphi,n}(\mu)}{\delta\mu(x)} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{F_{\varphi,n}(\mu+\varepsilon\,\delta_x)-F_{\varphi,n}(\mu)}{\varepsilon}.$$

У пункті 3.3 перевіряється, що процес, який заданий рівністю (3.7), є єдиним розв'язком $(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}_n},\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_n})$-проблеми мартингалів. На основі цього у параграфах 3.4 та 3.5 встановлено, що процес важких дифузійних частинок в $\mathcal{H}$ є єдиним розв'язком $(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}},\mathfrak{D}_{\mathcal{H}})$-проблеми мартингалів, де оператор $\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}$ задається формулою (3.9) та

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{H}} = \text{ЛО}\{F_{\varphi,m}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_n}: \\ \varphi \text{ має компактний носій},\ m\le n,\ n\in\mathbb{N}\}. \quad (3.14)$$

Однак тут означення проблеми мартингалів для $(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}},\mathfrak{D}_{\mathcal{H}})$ було дещо змінено у зв'язку з тим, що при доведенні єдиності виникає наступна проблема. Для того, щоб перевірити, що неперервний процес, який є розв'язком проблеми мартингалів, описує еволюцію маси даної сукупності частинок, нам потрібно виділити з такого мірозначного процесу систему неперервних процесів в $\mathbb{R}$, які б задавали траєкторії цих частинок. Цього ми не вміємо робити, тому були використані ідеї, які запропоновані у монографії [9], а саме: поряд із процесом в просторі цілочисельних мір розглядається процес у просторі послідовностей.

Означення 3.5.1. *Випадковий процес* $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$ *називатимемо розв'язком* $(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}, \mathfrak{D}_{\mathcal{H}})$*-проблеми мартингалів, якщо*

1) *для довільної функції* $F \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}$

$$F(\mu_t) - F(\mu_0) - \int\limits_0^t \mathfrak{G}_{\mathcal{H}}(F(\mu_s))ds \ - \ \textit{мартингал};$$

2) *існує строго марковський неперервний процес* $\{(x_k(t))_{k\in\mathbb{Z}},\ t \geq 0\}$ *в* $\mathcal{M}$ *такий, що*

$$\mu_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{x_k(t)}, \quad t \geq 0;$$

3) *для кожного* $k \in \mathbb{Z}$ *і довільної функції* $f \in C^2([0,+\infty))$, *обмеженої разом зі своїми похідними, яка задовольняє умову* $f''(0) = 0$, *різниця*

$$f(x_{k+1}(t) - x_k(t)) - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_0^t f''(x_{k+1}(s) - x_k(s)) \left[\frac{1}{\sqrt{\nu_{k+1}(s)}} + \frac{1}{\sqrt{\nu_k(s)}}\right] ds$$

є мартингалом. Тут

$$\nu_k(t) = \#\{i:\ x_i(t) = x_k(t)\}. \tag{3.15}$$

Зауваження 3.5.1. *Умова 3) означення 3.5.1 гарантує те, що процеси* $x_k(\cdot)$ *та* $x_l(\cdot)$ *після співпадання не розійдуться, тобто*

$$(x_k(t) - x_l(t))\, \mathbb{I}_{\{t>\tau_{k,l}\}} = 0.$$

Наступна теорема є основним результатом пункту 3.5.

Теорема 3.5.1. *Процес важких дифузійних частинок є единим розв'язком* $(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}, \mathfrak{D}_{\mathcal{H}})$*-проблеми мартингалів.*

РОЗДІЛ 1
СКІНЧЕННІ СИСТЕМИ ВЗАЄМОДІЮЧИХ ДИФУЗІЙНИХ ЧАСТИНОК

У даному розділі побудовано та вивчено властивості сукупності процесів, які описують наступну модель скінченної множини взаємодіючих частинок на прямій. Дифундуючі частинки стартують із деякої скінченної множини точок дійсної прямої, рухаються незалежно до моменту зіткнення, після чого склеюються і рухаються разом. Кожна частинка має масу m, зв'язану з її коефіцієнтом дифузії σ рівністю

$$\sigma^2 = \frac{1}{m},$$

причому маса частинок при склеюванні сумується. Процеси, які задають рух системи частинок, будуть побудовані конструктивно із сукупності стандартних незалежних вінерівських процесів. Траєкторії вінерівських процесів будемо склеювати у момент їхнього першого співпадання, змінюючи їхню дифузію. Показано, що процеси, які при цьому утворяться, є квадратично інтегровними мартингалами відносно спільної фільтрації. Перевірено, що така система є марковською, і знайдено вигляд її інфінітезимального оператора.

1.1 Деякі властивості відображення, яке склеює траєкторії процесів

Для того, щоб математично описати модель сукупності дифузійних частинок зі змінною масою, ми будемо із одних процесів утворювати інші за допомогою склеювання їхніх траєкторій. Останні будуть задавати поведінку таких частинок, тому у даному пункті встановлено деякі властивості відображення в $C(\mathbb{T})$, яке склеює функції. Тут $\mathbb{T}$ дорівнює $[0, T]$ або $[0, +\infty)$.

Нехай $\widetilde{\mathrm{C}}(\mathbb{T})$ — простір неперервних функцій на $\mathbb{T}$, які при $t = 0$ рівні нулю. Візьмемо функції f, g, h із $\widetilde{\mathrm{C}}(\mathbb{T})$ та x, y із $\mathbb{R}$. Позначимо

$$\tau(x, y, f, g) = \inf\{t \in \mathbb{T} :\ x + f(t) = y + g(t)\} \tag{1.1}$$

та

$$U_1(x, y, f, g, h) = f(t)\, \mathbb{I}_{\{\tau(x,y,f,g)>t\}} + \\ + [h(t) - h(\tau(x, y, f, g)) + f(\tau(x, y, f, g))]\, \mathbb{I}_{\{\tau(x,y,f,g)\leq t\}},$$

$$U_2(x, y, f, g, h) = g(t)\, \mathbb{I}_{\{\tau(x,y,f,g)>t\}} + \\ + [h(t) - h(\tau(x, y, f, g)) + g(\tau(x, y, f, g))]\, \mathbb{I}_{\{\tau(x,y,f,g)\leq t\}}\,.$$

Тут $\tau(x, y, f, g)$ є моментом першого співпадання функцій $x + f(\cdot)$ та $y + g(\cdot)$. Якщо на місці f і g стоятимуть два випадкових процеси, то τ називатимемо моментом зіткнення цих процесів. Бачимо, що відображення $U(x, y, f, g, h) = (U_1(x, y, f, g, h), U_2(x, y, f, g, h))$ двом довільним неперервним функціям f та g ставить у відповідність функції, які після $\tau(x, y, f, g)$ співпадають, тобто можна говорити, що U склеює функції.

Перевіримо спочатку вимірність введених тільки-що відображень. Нехай

$$\left(\mathcal{F}_t^0\right)_{t\geq 0} = (\sigma(\{f :\ f(s_1) \in \Delta_1\} \times \{g :\ g(s_2) \in \Delta_2\}\ , \\ s_i \leq t,\ \Delta_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ i = 1, 2))_{t\geq 0}$$

— потік σ-алгебр у просторі $(\widetilde{\mathrm{C}}(\mathbb{T}))^2$.

Твердження 1.1.1. *Відображення τ та U є вимірними відображеннями $\mathbb{R}^2 \times (\widetilde{\mathrm{C}}(\mathbb{T}))^2$ в $\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}^2 \times (\widetilde{\mathrm{C}}(\mathbb{T}))^3$ в $(\widetilde{\mathrm{C}}(\mathbb{T}))^2$ відповідно. Більше того, для довільного $t \in \mathbb{T}$*

$$\{\tau(x, y, \cdot, \cdot) \leq t\} \in \mathcal{F}_t^0,$$

тобто τ є марковським моментом відносно фільтрації $\left(\mathcal{F}_t^0\right)_{t\in\mathbb{T}}$.

Доведення. Для будь-яких $t \in \mathbb{T}$ з рівності

$$\{\tau(x,y,f,g) \le t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,t]} \left\{ |x + f(r) - y - g(r)| < \frac{1}{n} \right\}$$

випливає, що $\{\tau \le t\} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2 \times (\widetilde{\mathrm{C}}(\mathbb{T}))^2\right)$ і для довільних $x, y \in \mathbb{R}$ $\{\tau(x,y,\cdot,\cdot) \le t\} \in \mathcal{F}_t^0$.

Далі візьмемо $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$ та $f \in \widetilde{\mathrm{C}}(\mathbb{T})$ і позначимо $\pi_{t_1,\ldots,t_n} f = (f(t_1), \ldots, f(t_n))$. Хочемо показати, що $\pi_{t_1,\ldots,t_n} \circ U_1$ є вимірним відображенням $\mathbb{R}^2 \times (\widetilde{\mathrm{C}}(\mathbb{T}))^3$ в $\mathbb{R}^n$. З цього випливатиме наше твердження. Розглянемо

$$\pi_{t_1,\ldots,t_n} U_1(x,y,f,g,h) = (f(t_i)\, \mathbb{I}_{\{\tau(x,y,f,g) > t_i\}} +$$
$$+ [h(t_i) - h(\tau(x,y,f,g)) + f(\tau(x,y,f,g))]\, \mathbb{I}_{\{\tau(x,y,f,g) \le t_i\}})_{i=1,\ldots,m}.$$

В силу неперервності

$$\widetilde{\mathrm{C}}(\mathbb{T}) \times \mathbb{T} \ni (f,t) \mapsto f(t) \in \mathbb{R}$$

та вимірності τ маємо, що $\pi_{t_1,\ldots,t_n} \circ U_1$ вимірне відображення. $\square$

Далі доведемо декілька лем, з яких пізніше буде випливати неперервна залежність поведінки частинок зі змінною масою від множини старту.

Розглянемо неперервні випадкові процеси η_1, η_2 на $\mathbb{T}$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ такі, що $\eta_1(0) = \eta_2(0) = 0$. Для $x, y \in \mathbb{R}$ визначимо

$$\tau(x,y) = \tau(x,y,\eta_1,\eta_2). \tag{1.2}$$

В силу твердження 1.1.1 $\tau(x,y)$ — випадкова величина. Позначимо $\eta = \eta_2 - \eta_1$.

Лема 1.1.1. *Якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдуться t_1, t_2 із $[0, \varepsilon)$, можливо залежні від ω, такі, що*

$$\begin{aligned} &\eta(\tau(x,y) + t_1) > \eta(\tau(x,y)), \\ &\eta(\tau(x,y) + t_2) < \eta(\tau(x,y)), \end{aligned} \tag{1.3}$$

то для довільної послідовності $\{(x^m, y^m)\}_{m\geq 1}$, *яка прямує до* (x, y), *має місце збіжність майже напевно (м.н.)*

$$\tau(x^m, y^m) \to \tau(x, y) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Доведення. Оскільки для довільних $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\tau(x + z, y + z) = \tau(x, y),$$

то розглянемо

$$\tau(x) = \tau(x, 0).$$

Нехай послідовність $\{x^m\}_{m\geq 1}$ збігається до x. Покажемо, що $\tau(x^m) \to \tau(x)$ при $m \to +\infty$. Цього буде достатньо для доведення леми.

Оскільки множини $K_\varepsilon(\omega) = \{\eta(t, \omega),\ t \in [0, (\tau(x, \omega) - \varepsilon) \vee 0]\}$ та $\{x\}$ є компактами, які не перетинаються при $x \neq 0$, то знайдеться номер $N_1(\omega)$, що для довільних $m \geq N_1$ $x^m \notin K_\varepsilon(\omega)$. Звідси для таких m

$$\tau(x^m) > \tau(x) - \varepsilon\,. \tag{1.4}$$

Для $x = 0$ остання нерівність очевидна. З іншої сторони, в силу умов леми для

$$\eta_{\tau(x)} = \eta(t + \tau(x)) - \eta(\tau(x))$$

знайдуться $t_1, t_2 \in [0, \varepsilon)$ такі, що $\eta_{\tau(x)}(t_1) > 0$ та $\eta_{\tau(x)}(t_2) < 0$. Зі збіжності послідовності $\{x^m\}_{m\geq 1}$ випливає існування номера $N_2(\omega)$, що для довільного $m \geq N_2$

$$|x - x^m| < \eta_{\tau(x)}(t_1) \wedge \eta_{\tau(x)}(t_2).$$

Звідси із вигляду $\tau(x)$ та останньої нерівності маємо, що

$$\tau(x^m) \leq \tau(x) + \varepsilon$$

для довільного $m \geq N_2$.

Отже, $|\tau(x) - \tau(x^m)| < \varepsilon$ при $m \geq N_1 \vee N_2$. $\square$

Далі, нехай ξ — неперервний процес на $\mathbb{T}$ зі значеннями в $\mathbb{R}$, який в початковий момент часу $t=0$ дорівнює нулеві, і процеси η_1 та η_2 задовольняють умови попередньої леми. Побудуємо нові випадкові процеси наступним чином

$$(\widetilde{\eta}_1(x,\cdot),\widetilde{\eta}_2(y,\cdot)) = U(x,y,\eta_1,\eta_2,\xi).$$

Має місце наступна лема.

Лема 1.1.2. *Нехай послідовність* $\{(x^m,y^m)\}_{m\geq 1}$ *збігається до* (x,y) *в* $\mathbb{R}^2$. *Тоді для довільного* $T>0$ *такого, що* $[0,T]\subseteq\mathbb{T}$

$$\max_{0\leq t\leq T}|\widetilde{\eta}_1(x,t)-\widetilde{\eta}_1(x^m,t)|\to 0,$$
$$\max_{0\leq t\leq T}|\widetilde{\eta}_2(y,t)-\widetilde{\eta}_2(y^m,t)|\to 0$$

майже напевно при $m\to\infty$.

Доведення. Нехай $\varepsilon>0$ і $\Omega'=\{\tau(x^m,y^m)\to\tau(x,y)\}$. В силу леми 1.1.1 $\mathbb{P}\{\Omega'\}=1$. Надалі наші міркування проводитимемо для довільного фіксованого $\omega\in\Omega'$. Оскільки функції η_1 та ξ (ω фіксоване) — неперервні на $[0,T]$, то в силу теореми Кантора вони рівномірно неперервні. Звідси зрозуміло, що сім'я $\{\widetilde{\eta}_1(y,\cdot),\ y\in\mathbb{R}\}$ — одностайно рівномірно неперервна на $[0,T]$. Розглянемо $\varepsilon_1>0$, яке задамо пізніше. Оскільки ми взяли ω із Ω', то існує номер $N_1=N_1(\varepsilon_1)$, що для довільного $m\geq N_1$

$$|\tau(x,y)-\tau(x^m,y^m)|<\varepsilon_1\,.$$

Використовуючи вигляд процесу $\widetilde{\eta}_1$, отримаємо

$$\max_{0\leq t\leq T}|\widetilde{\eta}_1(x,t)-\widetilde{\eta}_1(x^m,t)| = \max_{t\leq\tau(x,y)-\varepsilon_1}|\widetilde{\eta}_1(x,t)-\widetilde{\eta}_1(x^m,t)|\vee$$
$$\vee\max_{|t-\tau(x,y)|\leq\varepsilon_1}|\widetilde{\eta}_1(x,t)-\widetilde{\eta}_1(x^m,t)|\vee$$
$$\vee\max_{\tau(x,y)+\varepsilon_1\leq t\leq T}|\widetilde{\eta}_1(x,t)-\widetilde{\eta}_1(x^m,t)|\leq$$
$$\leq|x-x^m|\vee\Bigg[\max_{|t-\tau(x,y)|\leq\varepsilon_1}|\widetilde{\eta}_1(x,t)-\widetilde{\eta}_1(x,\tau(x,y)-\varepsilon_1)|+$$

$$+\max_{|t-\tau(x,y)|\le\varepsilon_1}|\widetilde{\eta}_1(x,\tau(x,y)-\varepsilon_1)-\widetilde{\eta}_1(x^m,\tau(x,y)-\varepsilon_1)|+$$
$$+\max_{|t-\tau(x,y)|\le\varepsilon_1}|\widetilde{\eta}_1(x^m,\tau(x,y)-\varepsilon_1)-\widetilde{\eta}_1(x^m,t)|\Big]\vee$$
$$\vee\,|\eta_1(\tau(x,y))-\xi(\tau(x,y))-\eta_1(\tau(x^m,y^m))+\xi(\tau(x^m,y^m))|.$$

Використовуючи одностайну рівномірну неперервність сукупності $\{\widetilde{\eta}_1(y,\cdot),\ y\in\mathbb{R}\}$, візьмемо ε_1 так, щоб для довільного $y\in\mathbb{R}$

$$\max_{|t-\tau(x,y)|\le\varepsilon_1}|\widetilde{\eta}_1(y,\tau(x,y)-\varepsilon_1)-\widetilde{\eta}_1(y,t)|\le\frac{\varepsilon}{3}.$$

Нехай номер N_2 вибрано так, що для довільного $m\ge N_2$

$$|x-x^m|\le\frac{\varepsilon}{3}$$

та

$$|\eta_1(\tau(x,y))-\xi(\tau(x,y))-\eta_1(\tau(x^m,y^m))+\xi(\tau(x^m,y^m))|\le\varepsilon\,.$$

Звідси для $m\ge N_1\vee N_2$

$$\max_{0\le t\le T}|\widetilde{\eta}_1(x,t)-\widetilde{\eta}_1(x^m,t)|\le\frac{\varepsilon}{3}\vee\left[\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\right]\vee\varepsilon=\varepsilon\,.$$

Доведення для $\widetilde{\eta}_2$ аналогічне. □

Оскільки траєкторії частинок зі змінною масою ми будемо утворювати із траєкторій вінерівських процесів за допомогою склеювання останніх, то доведемо наступне твердження.

Твердження 1.1.2. *Нехай (w_1,w_2) — вінерівський процес в $\mathbb{R}^2$, який у нулі дорівнює нулеві, і послідовність $\{(x^m,y^m)\}_{m\ge1}$ збігається до (x,y) в $\mathbb{R}^2$. Тоді для довільного $h\in\widetilde{\mathrm{C}}(\mathbb{T})$ послідовність $\{U(x^m,y^m,w_1,w_2,h)\}_{m\ge1}$ прямує до $U(x,y,w_1,w_2,h)$ майже напевно в $(\widetilde{\mathrm{C}}(\mathbb{T}))^2$.*

Доведення. Позначимо $\widehat{w}_i=w_i(\tau(x,y)-\cdot)-w_i(\tau(x,y))$, $i=1,2$. В силу леми 1.1.1 $\tau(x,y)$ — марковський момент і згідно твердження 2.9 [16, ст. 94] $\mathbb{P}\{\tau(x,y)<\infty\}=1$. Використовуючи строго марковську властивість вінерівського процесу (Теорема 2.8 [16, ст. 91]), процеси $\widehat{w}_i,\ i = 1, 2$, знову вінерівські. Оскільки умова (1.3) для процесів $w_i,\ i = 1, 2$, випливає із закону повторного логарифму для $\widehat{w}_i,\ i = 1, 2$ (див. Теорема 2.5 [16, ст. 70]), то дане твердження випливає з леми 1.1.2. □

1.2 Існування скінченної системи мартингалів, які задовольняють умовам взаємодії

Метою даного пункту є конструктивна побудова системи мартингалів, що задають рух системи частинок зі склеюванням, яка описана у вступі. Підхід полягає в тому, щоб "скласти" траєкторії руху частинок зі шматків траєкторії незалежних вінерівських процесів. Ми розрізаємо або склеюємо такі траєкторії в моменти їх зустрічі. Тут перевіряється, що утворені відповідним чином нові випадкові процеси можуть служити математичною моделлю системи частинок зі склеюванням змінної маси.

Позначимо

$$E^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :\ x_i \le x_{i+1},\ i = 1, \ldots, n-1\}$$

та

$$A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n :\ a_i > 0\}.$$

Надалі довільний елемент $x = (x_1, \ldots, x_n)$ із множини E^n вважатимемо множиною старту n дифундуючих частинок з масами $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A_n$ відповідно. Основним результатом цього пункту є наступна теорема.

Теорема 1.2.1. *Для довільного $x \in E^n$ та $a \in A_n$ існує набір випадкових процесів $\{x_k(t),\ k = 1, \ldots, n,\ t \ge 0\}$ таких, що:*

1°) *для довільного* $k = 1, \ldots, n$ *процес* $x_k(\cdot)$ — *неперервний квадратично інтегровний мартингал відносно потоку* σ*-алгебр*

$$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} = (\sigma(x_k(s),\ s \leq t,\ k = 1, \ldots, n))_{t\geq 0}\,;$$

2°) $x_k(0) = x_k,\ k = 1, \ldots, n;$

3°) *для довільних* $l < k$ *та довільного* $t \geq 0$ *виконується нерівність* $x_l(t) \leq x_k(t);$

4°) *для довільного* $t \geq 0$ *квадратична характеристика*

$$\langle x_k(\cdot)\rangle_t = \int\limits_0^t \frac{ds}{m_k(s)},$$

де

$$m_k(t) = \sum_{i\in M_k(t)} a_i,$$

$$M_k(t) = \{i = 1, \ldots, n :\ \exists\ s \leq t,\ x_k(s) = x_i(s)\};$$

5°) *сумісна характеристика*

$$\langle x_l(\cdot), x_k(\cdot)\rangle_t\ \mathbb{I}_{\{t<\tau_{l,k}\}} = 0,$$

де $\tau_{l,k} = \inf\{t :\ x_l(t) = x_k(t)\}.$

Умови 1°)—5°) *однозначно визначають розподіл* $(x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ *у просторі* $\big((\mathrm{C}(\mathbb{R}^+))^n,\ \mathcal{B}((\mathrm{C}(\mathbb{R}^+))^n)\big).$

Умова 1°) означає, що частинки мають дифузію, яка змінюється згідно умови 4°), а саме: після склеювання їхня маса сумується і дифузія змінюється обернено пропорційно кореню квадратному маси. Умови 2°) та 3°) відповідають за старт і упорядкованість частинок під час руху, а 5°) вказує на незалежну поведінку до моменту зіткнення. Пізніше буде показано, що ефект склеювання, який присутній в даній моделі, також задається умовами 1°)—5°).

Доведення. Доведення ґрунтується на двох ідеях. По-перше, шукану систему процесів можна отримати із сукупності незалежних вінерівських процесів, склеюючи їхні траєкторії у відповідні моменти і змінюючи їхню дифузію після склеювання. І, по-друге, довільну систему процесів, яка описує сумісний рух частинок зі склеюванням змінної маси, можна "доклеїти" до системи незалежних вінерівських процесів.

Існування. Нехай $\{w_k,\ k=1,\ldots,n\}$ — сукупність стандартних незалежних вінерівських процесів. Побудуємо із $\{w_k,\ k=1,\ldots,n\}$ систему процесів $\{x_k(\cdot),\ k=1,\ldots,n\}$, яка володіє властивостями 1°)–5°). Для цього визначимо спочатку $x_k(\cdot)$ на відрізку $[0,1]$, а потім продовжимо на всю півпряму $[0,+\infty)$.

Нехай $\tau^{(0)}=0,\ \mathfrak{A}^{(0)}=\{\{i\},\ i=1,\ldots,n\}$ і $w_k^{(0)}(t)=x_k+\frac{w_k(t)}{\sqrt{a_k}}$, $k=1,\ldots,n,\ t\in[0,1]$. За індукцією побудуємо систему процесів $\{w_k^{(p)},\ k=1,\ldots,n\},\ p=1,\ldots,n-1$. Розглянемо для $k=1,\ldots,n-1$

$$\tau_k^{(p)}=\inf\{t:\ w_k^{(p-1)}(t)=w_{k+1}^{(p-1)}(t)\}\wedge 1.$$

Позначимо

$$\tau^{(p)}=\inf\{\tau_k^{(p)}>\tau^{(p-1)};\ k=1,\ldots,n-1\}\wedge 1.$$

Розглянемо $\mathfrak{A}^{(p)}$ — клас підмножин множини $\{1,\ldots,n\}$, який володіє наступними властивостями:

1) для довільної множини $A\in\mathfrak{A}^{(p)}$ і будь-яких $k,l\in A$ якщо $l\le i\le k$, то $i\in A$;
2) для довільної множини $A\in\mathfrak{A}^{(p)}$ і будь-яких $k,l\in A$ справедлива рівність $w_l^{(p-1)}(\tau^{(p)})=w_k^{(p-1)}(\tau^{(p)})$;
3) для довільної множини $A\in\mathfrak{A}^{(p)}$ і будь-яких $k\in A$ та $l\in\{1,\ldots,n\}\setminus A$ справедливо $w_l^{(p-1)}(\tau^{(p)})\ne w_k^{(p-1)}(\tau^{(p)})$.

Якщо $\tau^{(p)} = 1$, то візьмемо $w_k^{(p)}(t) = w_k^{(p-1)}(t),\ t \in [0,1]$, а якщо $\tau^{(p)} < 1$, то для $k \in A \in \mathfrak{A}^{(p)}$

$$w_k^{(p)}(t) = \begin{cases} w_k^{(p-1)}(t), & 0 \le t < \tau^{(p)}, \\ w_j^{(p-1)}(\tau^{(p)}) \left(1 - \frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}}\right) + \frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}} w_j^{(p-1)}(t), & \tau^{(p)} \le t \le 1, \end{cases} \tag{1.5}$$

де j — мінімальний елемент в A, $m_2 = \sum\limits_{i \in |A|} a_i$ та $m_1 = \sum\limits_{i \in |B|} a_i$, де $B \in \mathfrak{A}^{(p-1)},\ j \in B$.

В якості системи процесів $\{x_k(\cdot),\ k = 1, \ldots, n\}$ візьмемо $\{w_k^{(n-1)},\ k = 1, \ldots, n\}$, тобто $x_k(\cdot) = w_k^{(n-1)}$.

Зауваження 1.2.1. *У наведеній конструкції, склеюючи в момент зіткнення дві або більше траєкторій, ми завжди залишали ту, номер якої найменший (j — мінімальний елемент в A). Однак від цього обмеження можна відмовитись і вибирати номера траєкторій в наперед заданому порядку, тобто для перестановки $(p_1, \ldots, p_n)$ елементів $\{1, \ldots, n\}$ у формулі (1.5) визначати j як індекс мінімального елементу в множині $\{p_i,\ i \in A\}$. Для випадку, наведеного вище, $p_i = i,\ i = 1, \ldots, n$.*

Зауваження 1.2.2. *Правило, яке системі $\{x_k + w_k(\cdot),\ k = 1, \ldots, n\}$ ставить у відповідність систему $\{x_k(\cdot),\ k = 1, \ldots, n\}$ (заданий порядок склеювання p), позначимо через $F_n^{a,p}$, де $a \in A_n$ і $(p_1, \ldots, p_n)$ — деяка перестановка $\{1, \ldots, n\}$. Тоді в силу леми 1.1.1 $F_n^{a,p}$ — вимірне відображення простору $(C_n, \mathcal{B}_n)$ в $(C_n, \mathcal{B}_n)$. Тут $C_n = \{f \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R}^n) :\ f(0) = (x_1, \ldots, x_n)\}$ та $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(\mathrm{C}([0,1], \mathbb{R}^n)) \cap C_n$.*

Легко бачити, що процеси із сукупності $\{x_k(\cdot),\ k = 1, \ldots, n\}$ володіють наступними властивостями:

(a) для довільних $l, k = 1, \ldots, n$ і довільного $t \in [0,1]$ якщо $l < k$, то $x_l(t) \le x_k(t)$;

(b) для довільного $k = 1, \ldots, n$ справедливо $x_k(0) = x_k$;

(c) якщо $\tau_{l,k} = \inf\{t: \ x_l(t) = x_k(t)\}$, то

$$(x_l(t) - x_k(t))\, \mathbb{I}_{\{t>\tau_{l,k}\}} = 0, \quad k, l \in \{0, \dots, n\}, \ t \in [0,1].$$

Залишилось довести, що система $\{x_k(\cdot), \ k = 1, \dots, n\}$ задовольняє умови 1°), 4°), 5°) теореми.

Побудуємо аналогічно сукупності $\{x_k(\cdot), \ k = 1, \dots, n\}$ систему процесів $\{\widetilde{x}_k^m(\cdot), \ k = m, \dots, n\}$ із системи $\{w_k, \ k = m, \dots, n\}$, $m = 2, \dots, n$. Оскільки для $m = 2, \dots, n$ виконується рівність $\widetilde{x}_m^m(t) = x_m(t)$ при $t \in [0, \tau_{m,m-1}]$ і $\widetilde{x}_m^m(t) = x_{m-1}(t)$ при $t \in (\tau_{m,m-1}, 1]$ (остання властивість виконується в силу властивості (c)), то

$$x_m(t) = \widetilde{x}_m^m(t)\, \mathbb{I}_{\{t\le\tau_{m,m-1}\}} + x_{m-1}(t)\, \mathbb{I}_{\{t>\tau_{m,m-1}\}}. \tag{1.6}$$

Для довільного $k = 2, \dots, n$ визначимо

$$\widetilde{w}_k(t) = w_k(t)\, \mathbb{I}_{\{t\le\tau_{k,k-1}\}} + \\ + \left(\widetilde{w}_{k-1}(t) + w_k(\tau_{k,k-1}) - \widetilde{w}_{k-1}(\tau_{k,k-1})\right) \mathbb{I}_{\{t>\tau_{k,k-1}\}}, \tag{1.7}$$

$$\widetilde{w}_1(t) = w_1(t), \quad t \in [0,1].$$

Використовуючи (1.6), методом математичної індукції можна довести наступну лему.

Лема 1.2.1. *Для довільного* $k = 1, \dots, n$ $\widetilde{w}_k(t)$ — *стандартний вінерівський процес відносно потоку σ-алгебр* $\left(\mathcal{F}_t^{\widetilde{w}}\right)_{t\ge0}$, *де*

$$\mathcal{F}_t^{\widetilde{w}} = \sigma\left(\widetilde{w}_k(s), \ s \le t, \ k = 1, \dots, n\right),$$

і має місце зображення

$$x_k(t) = x_k + \int_0^t \frac{d\widetilde{w}_k(s)}{\sqrt{m_k(s)}},$$

де

$$m_k(t) = \sum_{i\in M_k(t)} a_i,$$

$$M_k(t) = \{i = 1, \dots, n: \ \exists\ s \le t, \ x_k(s) = x_i(s)\}.$$

Із леми 1.2.1 одразу випливає, що система $\{x_k(\cdot),\ k = 1, \ldots, n\}$ задовольняє умови 1°) і 4°) теореми. Залишилось довести, що $\langle x_l(\cdot), x_k(\cdot)\rangle_t \, \mathbb{I}_{\{t<\tau_{l,k}\}} = 0$.

Із рекурентного співвідношення (1.7) для $\widetilde{w}_k$ при $k = 1, \ldots, n$ отримаємо

$$\widetilde{w}_k(t) = \int\limits_0^t \mathbb{I}_{\{s\le\tau_{k,k-1}\}}\, dw_k(s) + \int\limits_0^t \mathbb{I}_{\{s>\tau_{k,k-1}\}}\, d\widetilde{w}_{k-1}(s) =$$
$$= \ldots = \int\limits_0^t \prod_{j=2}^{k} \mathbb{I}_{\{s>\tau_{j,j-1}\}}\, dw_1(s) +$$
$$+ \sum_{i=2}^{k-1} \int\limits_0^t \prod_{j=i+1}^{k} \mathbb{I}_{\{s>\tau_{j,j-1}\}}\, \mathbb{I}_{\{s\le\tau_{i,i-1}\}}\, dw_i(s) +$$
$$+ \int\limits_0^t \mathbb{I}_{\{s\le\tau_{k,k-1}\}}\, dw_k(s). \quad (1.8)$$

Використовуючи (1.8) і співвідношення

$$\tau_{l,k} = \max\{\tau_{i,i+1};\ i = l, \ldots, k-1\}, \quad l, k = 1, \ldots, n,\ l < k,$$

маємо $\langle \widetilde{w}_l, \widetilde{w}_k\rangle_t \, \mathbb{I}_{\{t<\tau_{l,k}\}} = 0$, а це і доводить те, що система $\{x_k(\cdot),\ k = 1, \ldots, n\}$ задовольняє умову 5°), оскільки

$$\langle x_l(\cdot), x_k(\cdot)\rangle_t \, \mathbb{I}_{\{t<\tau_{l,k}\}} = \int\limits_0^t \frac{d\langle \widetilde{w}_l, \widetilde{w}_k\rangle_s}{\sqrt{m_l(s)\, m_k(s)}} \, \mathbb{I}_{\{t<\tau_{l,k}\}} = 0.$$

Єдиність. Для доведення єдиності розподілу зауважимо, що умови теореми не вказують явно, що процеси після зустрічі співпадають. Наступна лема показує, що умови 1°) та 3°) це забезпечують.

Лема 1.2.2. *Нехай $y_1,\ y_2$ — неперервні мартингали відносно спільної фільтрації $(\mathcal{S}_t)_{t\ge0}$. Якщо $y_1(t) \le y_2(t)$ для всіх $t \in [0, T]$, то*

$$(y_2(t) - y_1(t))\, \mathbb{I}_{\{t>\sigma\}} = 0,$$

де $\sigma = \inf\{t :\ y_1(t) = y_2(t)\} \wedge T$.

Ця лема є прямим наслідком Твердження 2.3.4 [17, ст. 74], зміст якого полягає в тому, що додантій неперервний справа супермартингал після попадання в нуль там і залишається.

Повернемось до доведення теореми. Нехай випадкові процеси у системі $\{x_k(t),\ k = 1, \dots, n,\ t \in [0,1]\}$ задовольняють умовам 1°)—5°). Візьмемо для довільного $k = 1, \dots, n$

$$w_k(t) = \int_0^t \sqrt{m_k(s)} dx_k(s). \tag{1.9}$$

Зрозуміло, що $\{w_k,\ k = 1, \dots, n\}$ — система квадратично інтегровних мартингалів відносно спільної фільтрації $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Крім того

$$\langle w_k \rangle_t = \int_0^t m_k(s) d\langle x_k(\cdot) \rangle_s = \int_0^t ds = t.$$

В силу теореми Леві (див. Теорема 2.6.1 [18, ст. 81]) для довільного $k = 1, \dots, n$ процес w_k — вінерівський, причому з властивості 5°) маємо

$$\langle w_l, w_k \rangle_t \, \mathbb{I}_{\{t < \tau_{l,k}\}} = 0. \tag{1.10}$$

З формули (1.9) випливає, що

$$x_k(t) = x_k + \int_0^t \frac{dw_k(s)}{\sqrt{m_k(s)}}, \quad t \in [0,1].$$

Розглянемо (можливо на розширеному ймовірносному просторі) систему незалежних стандартних вінерівських процесів $\{\eta_k,\ k = 1, \dots, n\}$, які не залежать від системи $\{w_k,\ k = 1, \dots, n\}$. Візьмемо

$$\widetilde{w}_1(t) = w_1(t),$$

$$\widetilde{w}_k(t) = w_k(t) \, \mathbb{I}_{\{t \leq \tau_{k,k-1}\}} + (\eta_k(t) + w_k(\tau_{k,k-1}) - \eta_k(\tau_{k,k-1})) \, \mathbb{I}_{\{t > \tau_{k,k-1}\}} =$$
$$= \int_0^t \mathbb{I}_{\{s \leq \tau_{k,k-1}\}} \, dw_k(s) + \int_0^t \mathbb{I}_{\{s > \tau_{k,k-1}\}} \, d\eta_k(s),$$

$$k = 2, \dots, n, \quad t \in [0, 1].$$

Процеси $\widetilde{w}_k,\ k = 1, \dots, n,$ — квадратично інтегровні мартингали і в силу незалежності систем процесів $\{\eta_k,\ k = 1, \dots, n\}$ та $\{w_k,\ k = 1, \dots, n\}$

$$\langle \widetilde{w}_l, \widetilde{w}_k \rangle_t = \int\limits_0^t \mathbb{I}_{\{s \le \tau_{l,l-1}\}} \mathbb{I}_{\{s \le \tau_{k,k-1}\}} \, d\langle w_l, w_k \rangle_s + \\ + \int\limits_0^t \mathbb{I}_{\{s > \tau_{l,l-1}\}} \mathbb{I}_{\{s > \tau_{k,k-1}\}} \, d\langle \eta_l, \eta_k \rangle_s = \delta_{k,l} t.$$

Остання рівність справедлива в силу того, що $\tau_{l,l-1} \wedge \tau_{k,k-1} \le \tau_{l,k}$ і властивості (1.10). Звідси випливає (див. Теорема 2.6.1 [18, ст. 81]), що $(\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_n)$ — вінерівський процес в $\mathbb{R}^n$. Тепер із побудови $F_n^{a,p}$, де $p = (1, \dots, n)$, та леми 1.2.2 випливає, що $F_n^{a,p}(x_1 + \widetilde{w}_1, \dots, x_n + \widetilde{w}_n) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))$. А це і доводить єдиність розподілу $(x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))$ в $((\mathrm{C}([0, 1]))^n)$.

Залишилось продовжити процеси $x_k(\cdot),\ k = 1, \dots, n,$ з відрізка $[0, 1]$ на всю півпряму $\mathbb{R}^+$. Позначимо $\{x_{k,T}(\cdot),\ k = 1, \dots, n\}$ систему процесів, яка побудована із фіксованої сукупності стандартних вінерівських процесів $\{w_k,\ k = 1, \dots, n\}$ таким же чином, як і система $\{x_k(t),\ k = 1, \dots, n,\ t \in [0, 1]\}$. Відмітимо, що для довільних $T_2 > T_1 > 0$ виконується рівність $x_{k,T_1}(t) = x_{k,T_2}(t)$ для кожного $k = 1, \dots, n$, $t \in [0, T_1]$, $\omega \in \Omega$. Це і доводить нашу теорему. □

Означення 1.2.1. *Для довільного фіксованого $x \in E^n$ випадковий процес $X^a_\cdot(x) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))$, заданий на $[0, +\infty)$ зі значеннями в E^n, називатимемо процесом важких дифузійних частинок в E^n, якщо він задовольняє умови $1^\circ)$–$5^\circ)$ теореми 1.2.1.*

Зауваження 1.2.3. *Із доведення теореми випливає, що для довільної сукупності процесів $\{x_k(t),\ k = 1, \dots, n,\ t \in [0, 1]\}$, які задовольняють умови $1^\circ)$–$5^\circ)$, знайдеться (можливо на розширеному* *ймовірносному просторі) вінерівський процес* $(w_1, \ldots, w_n)$ *зі значеннями в* $\mathbb{R}^n$ *такий, що* $F_n^{a,p}(x_1+w_1, \ldots, x_n+w_n) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$, *де* $p = (1, \ldots, n)$.

Пізніше для нас буде важливий порядок склеювання вінерівських процесів у побудові системи, яка задовольняє умови теореми. У зв'язку з цим доведемо наступну лему.

Лема 1.2.3. *Для довільної перестановки* $p = (p_1, \ldots, p_n)$ *елементів* $1, \ldots, n$ *і довільної системи незалежних стандартних вінерівських процесів* $\{w_k,\ k = 1, \ldots, n\}$

$$F_n^{a,p}(x_1 + w_1, \ldots, x_n + w_n) \stackrel{d}{=} F_n^{a,(1,\ldots,n)}(x_1 + w_1, \ldots, x_n + w_n),$$

тобто процеси $\{y_k(t),\ k = 1, \ldots, n,\ t \in [0, 1]\}$, *де*

$$(y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)) = F_n^{a,p}(x_1 + w_1, \ldots, x_n + w_n), \tag{1.11}$$

задовольняють умови $1^\circ)$–$5^\circ)$ *теореми.*

Доведення. Перевіримо спочатку для довільного $i = 1, \ldots, n - 1$ рівність

$$F_n^{a,p}(x_1 + w_1, \ldots, x_n + w_n) \stackrel{d}{=} F_n^{a,p^i}(x_1 + w_1, \ldots, x_n + w_n), \tag{1.12}$$

де $p^i = (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, p_i, p_{i+2}, \ldots, p_n)$.

Нехай $\theta = \inf\{t :\ y_i(t) = y_{i+1}(t)\} \wedge 1$. В силу побудови процесів $\{y_k(t),\ k = 1, \ldots, n,\ t \in [0, 1]\}$ момент θ є марковським відносно фільтрації, породженої процесами $\{w_k,\ k = 1, \ldots, n\}$.

Візьмемо

$$\widetilde{w}_k(t) = w_k(t), \quad k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, i + 1\},$$

$$\widetilde{w}_i(t) = \int_0^t \mathbb{I}_{\{s \le \theta\}}\, dw_i(s) + \int_0^t \mathbb{I}_{\{s > \theta\}}\, dw_{i+1}(s),$$

$$\widetilde{w}_{i+1}(t) = \int_0^t \mathbb{I}_{\{s \le \theta\}}\, dw_{i+1}(s) + \int_0^t \mathbb{I}_{\{s > \theta\}}\, dw_i(s),\ t \in [0, 1].$$

Використовуючи формулу для характеристики інтеграла Іто [18, ст. 63], маємо $\langle \widetilde{w}_k, \widetilde{w}_l \rangle_t = \delta_{k,l} t$. Звідси в силу теореми Леві (див. Теорема 2.6.1 [18, ст. 81]) $\{\widetilde{w}_k,\ k = 1, \ldots, n\}$ — незалежні вінерівські процеси. Із зображення $\widetilde{w}_k$ зрозуміло, що

$$F_n^{a,p}(x_1 + w_1, \ldots, x_n + w_n) = F_n^{a,p^i}(x_1 + \widetilde{w}_1, \ldots, x_n + \widetilde{w}_n).$$

Отже, згідно зауваження 1.2.2 рівність (1.12) вірна. Оскільки p — перестановка елементів $1, \ldots, n$, то це доводить лему. □

Аналогічно, як і в доведенні теореми 1.2.1, продовжимо систему $\{y_k(t),\ k = 1, \ldots, n,\ t \in [0, 1]\}$, яка визначена формулою (1.11), на всю півпряму. Отримаємо $\{y_k(t),\ k = 1, \ldots, n,\ t \geq 0\}$. Відображення, яке системі $\{x_k + w_k(t),\ k = 1, \ldots, n,\ t \geq 0\}$ ставить у відповідність систему $\{y_k(t),\ k = 1, \ldots, n,\ t \geq 0\}$, позначимо через $\widehat{F}_n^{a,p}$.

Зауваження 1.2.4. *Всі результати, які отримані для відображення $F_n^{a,p}$, залишаються справедливими і для $\widehat{F}_n^{a,p}$, зокрема для довільної системи стандартних вінерівських процесів $\{w_k,\ k = 1, \ldots, n\}$ та перестановки p система процесів $\widehat{F}_n^{a,p}(x_1 + w_1, \ldots, x_n + w_n)$ задовольняє умови $1°)$—$5°)$ теореми 1.2.1.*

Зауваження 1.2.5. *Нехай $\{x_k(t),\ k = 1, \ldots, n,\ t \geq 0\}$ сукупність процесів із теореми 1.2.1. Тоді для довільного $t \geq 0$ набір множин*

$$\mathcal{D}_t^n = \{\{k : \ x_k(t) = x_l(t)\},\ l = 1, \ldots, n\}$$

утворює випадкове розбиття множини $\{1, \ldots, n\}$ (див., наприклад, [19]).

1.3 Марковський процес в просторі $\mathbb{R}^n$, що відповідає системі взаємодіючих дифузійних частинок

В попередньому пункті була побудована система процесів $\{x_k(t),\ k = 1, \ldots, n,\ t \geq 0\}$, яка задовольняє умови $1°)$—$5°)$ теореми 1.2.1. Вона описує сумісний рух дифундуючих частинок, що стартували з точок $x_1, \ldots, x_n$ із масами $a_1, \ldots, a_n$ у цих точках, рухаються незалежно до моменту зіткнення, потім, склеюючись, сумують свою масу і рухаються разом. У даному пункті перевіримо, що еволюція частинок в такій моделі залежить лише від стану системи в фіксований момент часу і не залежить від минулого. Тобто покажемо, що система процесів $X^a_\cdot(x) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ утворює марковський процес у просторі $\mathbb{R}^n$. Надалі в силу умови 3°) фазовим простором побудованої сукупності процесів вважатимемо простір E^n з евклідовою метрикою.

Зауважимо, що для $x \in E^n$ $X^a_\cdot(x)$ описує поведінку багатовимірної частинки, яка рухається у просторі E^n як броунівська до моменту попадання на границю області (коли будь-які дві з одновимірних частинок склеюються), після цього вона змінює свої характеристики і рухається далі, не покидаючи межі. При цьому на межі E^n дана частинка є знову броунівська, але меншої розмірності та з іншою дифузією, тому її фазовим простором можна вважати E^{n-1} і т.д.

Нашою метою є побудова сім'ї процесів $X^a_\cdot(x)$ одночасно для всіх точок $x \in E^n$. Зробимо це наступним чином. Траєкторії скінченної сукупності частинок задаватимемо за допомогою паралельного перенесення траєкторії деякої, наперед виділеної нами, частинки. Сформулюємо наступне означення [20].

Означення 1.3.1. *Сім'ю $\mathrm{C}_{E^n}([s,\infty))$-значних випадкових процесів $\{X^a_{s,\cdot}(x),\ x \in E^n\}$, $s \geq 0$, називатимемо потоком частинок зі склеюванням, якщо для довільного $s \geq 0$ відображення*

$$X^a_{s,\cdot} : E^n \times \Omega \to \mathrm{C}_{E^n}([s,\infty))$$

є вимірним і виконуються наступні умови

1) *для довільних $s < r < t$ і $x \in E^n$ $X^a_{r,t}(X^a_{s,r}(x)) = X^a_{s,t}(x)$ м.н.;*
2) *для довільних $t_1 < \ldots < t_N$ сім'я $\{X^a_{t_i,t_{i+1}},\ 1 \leq i \leq N-1\}$ є незалежною;*

3) для довільного s та довільних $x^1, \ldots, x^m \in E^n$ розподіл $(X^a_{s,s+\cdot}(x^1), \ldots, X^a_{s,s+\cdot}(x^m))$ співпадає з розподілом $(\widehat{F}^{a,p}_n(x^1 + w(\cdot)), \ldots, \widehat{F}^{a,p}_n(x^m + w(\cdot)))$, де w — деякий стандартний вінерівський процес в $\mathbb{R}^n$ та $p = (1, \ldots, n)$.

В даному пункті вважатимемо, що $p = (1, \ldots, n)$. Перевіримо існування потоку частинок зі склеюванням.

Твердження 1.3.1. *Для довільного $a \in A_n$ існує потік частинок зі склеюванням $\{X^a_{s,t}(x),\ x \in E^n,\ s,t \in [0, +\infty),\ s \le t\}$.*

Доведення. Нехай w деякий вінерівський процес в $\mathbb{R}^n$. Візьмемо для довільного $x \in E^n$ та $s \ge 0$

$$X^a_{s,s+\cdot}(x) = \widehat{F}^{a,p}_n(x + w(s+\cdot) - w(s)).$$

Покажемо, що $\{X^a_{s,t}(x),\ x \in E^n,\ s,t \in [0, +\infty),\ s \le t\}$ шуканий потік частинок зі склеюванням. Виконання умов 1)—3) означення очевидне. Використовуючи вигляд відображення $\widehat{F}^{a,p}_n$ та лему 1.1.1, методом математичної індукції нескладно довести вимірність $\mathrm{C}_{E^n}([s, \infty))$-значного процесу $X^a_{s,\cdot}(x)$. □

Для доведення марковської властивості процесу важких дифузійних частинок нам потрібно навчитись вміщати цей процес у деякий потік частинок зі склеюванням. Має місце наступна лема.

Лема 1.3.1. *Нехай $x^0 \in E^n$ і $X^a_\cdot(x^0)$ — процес важких дифузійних частинок. Тоді існує потік частинок зі склеюванням $\{X^a_{s,t}(x),\ x \in E^n,\ s,t \in [0, +\infty),\ s \le t\}$ (можливо на розширеному ймовірнісному просторі) такий, що*

$$X^a_{0,t}(x^0) = X^a_t(x^0), \quad t \ge 0. \tag{1.13}$$

Доведення. Згідно зауважень 1.2.3 та 1.2.4 знайдеться вінерівський процес w в $\mathbb{R}^n$ (можливо на розширеному ймовірнісному просторі) такий, що

$$X^a_\cdot(x^0) = \widehat{F}^{a,p}_n(x^0 + w(\cdot)).$$

Зрозуміло, що потік частинок зі склеюванням

$$X^a_{s,s+\cdot}(x) = \widehat{F}^{a,p}_n(x + w(s+\cdot) - w(s))$$

є шуканим. $\square$

Тепер ми готові довести основний результат цього пункту.

Теорема 1.3.1. *Для довільного $x \in E^n$ та $a \in A_n$ процес важких дифузійних частинок $X^a_\cdot(x)$ є марковським у просторі E^n.*

Доведення. Оскільки $X^a_\cdot(x)$ — процес важких дифузійних частинок, то в силу твердження 1.3.1 знайдеться стохастичний потік частинок зі склеюванням $X^a_{s,t}(x)$ такий, що

$$X^a_t(x) = X^a_{0,t}(x).$$

Нехай

$$\mathcal{F}^{X(x)}_t = \sigma\left(X^a_{0,r}(x),\ r \le t,\ x \in E^n\right).$$

Розглянемо для $0 \le s \le t$, $x \in E^n$ та $f \in \mathrm{C}_b(E^n)$

$$\mathbb{E}\left(f(X^a_t(x))|\,\mathcal{F}^{X(x)}_s\right) = \mathbb{E}\left(f(X^a_{0,t}(x))|\,\mathcal{F}^{X(x)}_s\right) =$$
$$= \mathbb{E}\left(f(X^a_{s,t}(X^a_{0,s}(x)))|\,\mathcal{F}^{X(x)}_s\right) = \mathbb{E}\left(f(X^a_{s,t}(y))\right)\Big|_{y=X^a_{0,s}(x)}.$$

Пояснимо детально останній перехід. Для цього використаємо наступне твердження (Теорема 5.4 [21, ст. 85]).

Теорема 1.3.2. *Нехай ξ — випадковий елемент у вимірному просторі Z такий, що $\mathbb{P}\{\xi \in \cdot|\mathcal{S}\}$ має регулярну версію ν, $\mathcal{S}$ — деяка σ-алгебра, η — $\mathcal{S}$-вимірний елемент в Z та g — вимірна функція на Z^2, для якої $\mathbb{E}\,|g(\xi,\eta)| < \infty$. Тоді*

$$\mathbb{E}(g(\xi,\eta)|\mathcal{S}) = \int g(s,\eta)\nu(ds).$$

У нашому випадку рівність $\mathbb{E}\left(f(X^a_{s,t}(X^a_{0,s}(x)))|\,\mathcal{F}^{X(x)}_s\right) = \mathbb{E}\left(f(X^a_{s,t}(y))\right)\Big|_{y=X^a_{0,s}(x)}$ випливає з теореми 1.3.2, якщо взяти у ролі

Z простір функцій на $\mathbb{R}^n$ з циліндричною σ-алгеброю, $\xi = X^a_{s,t}$, $\eta = X^a_{0,s}$, $\mathcal{S} = \mathcal{F}^{X(x)}_s$ та $g(z_1(\cdot), z_2(\cdot)) = f(z_1(z_2(x)))$.

З іншого боку,

$$\mathbb{E}\left(f(X^a_t(x))|X^a_s(x)\right) = \mathbb{E}\left(f(X^a_{0,t}(x))|X^a_{0,s}(x)\right) =$$
$$= \mathbb{E}\left(f(X^a_{s,t}(X^a_{0,s}(x)))|X^a_{0,s}(x)\right) = \mathbb{E}\left(f(X^a_{s,t}(y))\right)\Big|_{y=X^a_{0,s}(x)}.$$

Отже,

$$\mathbb{E}\left(f(X^a_t(x))|\,\mathcal{F}^{X(x)}_s\right) = \mathbb{E}\left(f(X^a_t(x))|X^a_s(x)\right).$$

Оскільки $\mathcal{F}^X_s = \sigma\left(X^a_r(x),\ r \le s\right) \subset \mathcal{F}^{X(x)}_s$, то

$$\mathbb{E}\left(f(X^a_t(x))|\,\mathcal{F}^X_s\right) = \mathbb{E}\left(f(X^a_t(x))|X^a_s(x)\right),$$

що і треба було показати. □

Сформулюємо одну властивість потоку $\{X^a_{s,t}(x),\ x \in E^n,\ s,t \in [0,+\infty),\ s \le t\}$, з якої пізніше випливатиме строга марковість процесу важких дифузійних частинок.

Лема 1.3.2. *Нехай $\{X^a_{s,t}(x),\ x \in E^n,\ s,t \in [0,+\infty),\ s \le t\}$ — потік частинок зі склеюванням. Тоді для довільного $s \ge 0$ $\mathrm{C}_{E^n}([s,\infty))$-значний процес $X^a_{s,\cdot}(x)$ є стохастично неперервним відносно x.*

Доведення цієї леми випливає із твердження 1.1.2.

Як уже зазначалось, процес, який розглядається, описує сумісний рух частинок, що склеюються і змінюють свою масу. Зауважимо, що дану модель можна інтерпретувати наступним чином. Рухаються важкі частинки, які складаються з елементарних частинок, причому елементарних частинок є рівно n штук з масами $a_1, \ldots, a_n$ відповідно. Маса важкої частинки рівна сумі мас елементарних, з яких вона складається. При такому підході еволюцію системи можемо описувати за допомогою мірозначних процесів вигляду $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \delta_{x_k(t)}$, де $x_k(t)$ — положення k-ої елементарної частинки в момент t, а a_k — її маса. В останньому розділі ми будемо вивчати поведінку нашої системи з точки зору мірозначних процесів. Зараз встановимо неперервну залежність процесу важких дифузійних частинок від початкового положення і мас елементарних частинок. Адже це те саме, що і неперервна залежність $\sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{x_k(t)}$ від $\sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{x_k(0)}$, де $(x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ — процес важких дифузійних частинок в E^n.

Нехай

$$Y_\cdot^a(x) = \widehat{F}_n^{a,p}(x + w(\cdot)),$$

де w — стандартний вінерівський процес в $\mathbb{R}^n$. Сформулюємо наступну лему.

Лема 1.3.3. *Для довільного $T > 0$ і послідовностей $\{x^m\}_{m\geq 1}$ в E^n та $\{a^k\}_{k\geq 1}$ в A_n*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|Y_\cdot^a(x) - Y_\cdot^{a^k}(x^m)\| \to 0 \quad \text{м.н.},$$

якщо $x^m \to x \in E^n$ і $a^k \to a \in A_n$ при $m, k \to +\infty$.

Доведення. Нехай ξ — неперервний процес на $\mathbb{T}$ зі значеннями в $\mathbb{R}$, який в початковий момент часу $t = 0$ дорівнює нулеві, і процеси η_1 та η_2 задовольняють умови леми 1.1.1. Побудуємо нові випадкові процеси наступним чином

$$(\widetilde{\eta}_1(x, a, c, \cdot), \widetilde{\eta}_2(y, b, c, \cdot)) = U(x, y, a \cdot \eta_1, b \cdot \eta_2, c \cdot \xi).$$

Тут $x, y \in \mathbb{R}$ і $a, b, c > 0$. Аналогічно лемі 1.1.2 має місце наступна лема.

Лема 1.3.4. *Нехай послідовність $\{(x^m, y^m)\}_{m\geq 1}$ збігається до (x, y) в $\mathbb{R}^2$ і $\{(a^k, b^k, c^k)\}_{k\geq 1}$ — до (a, b, c) в $\mathbb{R}^3$. Тоді для довільного $T > 0$ такого, що $[0, T] \subseteq \mathbb{T}$*

$$\max_{0\leq t\leq T} |\widetilde{\eta}_1(x, a, c, t) - \widetilde{\eta}_1(x^m, a^k, c^k, t)| \to 0,$$

$$\max_{0\leq t\leq T} |\widetilde{\eta}_2(y, b, c, t) - \widetilde{\eta}_2(y^m, b^k, c^k, t)| \to 0$$

при $m, k \to \infty$.

Звідси, використовуючи конструкцію $\widehat{F}_n^{a,p}$, методом математичної індукції можна перевірити твердження леми 1.3.3. $\square$

1.4 Напівгрупа операторів для скінченного числа частинок

У даному пункті знайдемо напівгрупу операторів, яка відповідає марковському процесу важких дифузійних частинок в E^n, а також запишемо вигляд її інфінітезимального оператора. Для довільного $t \geq 0$, $x \in E^n$ та обмеженої вимірної функції f на E^n позначимо

$$T_t f(x) = \mathbb{E}\, f(X_t^a(x)),$$

де $X_\cdot^a(x)$ — процес важких дифузійних частинок. Згідно твердження 4.1.6 [22, ст. 161] сім'я $\{T_t,\ t \geq 0\}$ повністю задає скінченновимірні розподіли процесу важких дифузійних частинок.

Надалі символом $\mathrm{C}_0(E^n)$ позначатимемо простір неперервних функцій на E^n, що зануляються на нескінченності, з рівномірною нормою, яку надалі позначатимемо $\|\cdot\|$. Перевіримо, що $\{T_t,\ t \geq 0\}$ є напівгрупою операторів на просторі $\mathrm{C}_0(E^n)$.

Твердження 1.4.1. *$\{T_t,\ t \geq 0\}$ задовольняє наступні властивості:*

1) $T_t : \mathrm{C}_0(E^n) \to \mathrm{C}_0(E^n)$*;*

2) $T_t 1 = 1$*;*

3) $T_t T_s f(x) = T_{t+s} f(x)$*;*

4) для довільного $f \in \mathrm{C}_0(E^n)$ $\|T_t f - f\| \to 0$ *при* $t \to 0$*;*

5) $\|T_t f\| \leq \|f\|$.

Зауваження 1.4.1. *Сім'я операторів $\{T_t,\ t \geq 0\}$, яка задовольняє умови 1)—5) попереднього твердження, називається фелерівською напівгрупою [22, ст. 166].*

Доведення. Перевіримо спочатку першу властивість. Неперервність функції $T_t f$ випливає із стохастичної неперервності потоку частинок зі склеюванням (див. Твердження 1.3.1 та Лема 1.3.2). Покажемо, що $T_t f$ прямує до нуля, коли $|x| \to \infty$. Нехай $\{x^m = (x_1^m, \ldots, x_n^m)\}_{m\geq 1} \subset E^n$ і $|x^m| \to \infty$ при $m \to \infty$. Доведемо, що $f(X_t^a(x^m))$ прямує до нуля за ймовірністю при $m \to \infty$. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $x_1^m \to \infty$. Позначимо символом $X_t^1(x)$ першу координату вектора $X_t^a(x)$. Маємо

$$\mathbb{P}\left\{\left|X_t^1(x) - x_1\right| > C\right\} \leq \mathbb{P}\left\{\sup_{s\leq t}\left(X_s^1(x) - x_1\right)^2 > C^2\right\} \leq$$
$$\leq \frac{1}{C^2}\,\mathbb{E}\left(X_t^1(x) - x_1\right)^2 \leq \frac{t}{C^2}.$$

Тут ми скористались нерівністю для супремума мартингалів (Теорема 3.2 [23, ст. 66]) і тим, що характеристика неперервного мартингала $\langle X_t^1(x)\rangle \leq t$.

Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і виберемо C_ε так, щоб для довільного $x \in E^n$

$$\mathbb{P}\left\{\left|X_t^1(x) - x_1\right| > C_\varepsilon\right\} \leq \varepsilon\,. \tag{1.14}$$

Оскільки $f \in \mathrm{C}_0(E^n)$, то знайдеться таке x_1^0, що для довільного $|x_1| > x_1^0 - C_\varepsilon$ виконується

$$|f(x)| \leq \varepsilon\,. \tag{1.15}$$

З формул (1.14) та (1.15) випливає, що для довільного $|x_1^m| > x_1^0$

$$\mathbb{P}\left\{|f(X_t^a(x^m))| > \varepsilon\right\} < \varepsilon\,.$$

Властивість 1) доведено.

Властивості 2) та 5) очевидні, а властивість 3) випливає з марковської властивості процесу важких дифузійних частинок (див. Теорема 1.3.1). Далі з неперервності процесу $X_t^a(x)$ по t випливає, що при $t \to 0$

$$|T_t f(x) - f(x)| \to 0.$$

Звідси та з властивості 1) (див. [24, ст. 50]) випливає властивість 4).

$\square$

Отже, ми довели, що напівгрупа операторів $\{T_t,\ t \geq 0\}$ є фелерівською напівгрупою. Знайдемо вигляд її інфінітезимального оператора. Для цього спочатку введемо деякі позначення.

Нехай $\mathfrak{S}^n = \{K = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) : \alpha_i \subseteq \{1, \ldots, n\},\ i = 1, \ldots, p,\ p = 1, \ldots, n\}$ — сукупність розбиттів множини $\{1, \ldots, n\}$ таких, що

1) $l < k$ для довільного $k \in \alpha_i$, $l \in \alpha_{i+1}$ та $i \in \{1, \ldots, n-1\}$;

2) $\bigcup\limits_{i=1}^{p} \alpha_i = \{1, \ldots, n\}$.

Символом $|K|$ позначатимемо число p, а $K(i)$ — елемент $\alpha \in K$, для якого $i \in \alpha$. Візьмемо

$$S_K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in E^n : \ x_i = x_{i+1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow K(i) = K(i+1),\ i = 1, \ldots, n-1\}$$

та

$$\mathfrak{S}_K^- = \{(\beta_1, \ldots, \beta_q) : \ q = |K| - 1,\ \forall\, i\ \exists\, j\ \beta_i \supseteq K(j)\}.$$

Для розбиття $K \in \mathfrak{S}^n$ позначатимемо символом f_K звуження n-значної функції f на множину S_K^n, тобто

$$f_K(y_1, \ldots, y_{|K|}) = f\big|_{S_K^n}(x_1, \ldots, x_n),$$

де $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_1, \ldots, y_{|K|}, \ldots, y_{|K|})$.

Нехай $\widehat{\mathrm{C}}(E^n)$ — сукупність функцій f із $\mathrm{C}_0(E^n)$ таких, що для довільного $K = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathfrak{S}^n$ функція f_K двічі неперервно диференційовна на $E^{|K|}$ і похідна до другого порядку включно може бути продовжена до неперервної функції на $S_K^n \cup \Big(\bigcup_{P \in \mathfrak{S}_K^-} S_P^n\Big)$. Тепер ми готові визначити генератор фелерівської напівгрупи. Візьмемо

$f \in \widehat{\mathrm{C}}(E^n)$ і, застосовуючи до $f(X_t^a(x))$ формулу Іто, отримаємо

$$f(X_t^a(x)) = M(t) + \int\limits_0^t \mathfrak{G}_{E^n} f(X_s^a(x))ds. \tag{1.16}$$

Тут $M(t)$ — мартингал і

$$\mathfrak{G}_{E^n} f(x) = \sum_{K \in \mathfrak{S}^n} \mathbb{I}_K(x) \Delta_K f_K(x),$$

де для довільного $K = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathfrak{S}^n$

$$\Delta_K f_K(y_1, \ldots, y_p) = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\#\alpha_j} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} f_K(y_1, \ldots, y_p).$$

Для довільної функції $f \in \widehat{\mathrm{C}}(E^n)$, взагалі кажучи, функція $\mathfrak{G}_{E^n} f$ розривна. Тому будемо задавати генератор тільки на тих функціях, для яких $\mathfrak{G}_{E^n} f$ — неперервна. Отже, нехай $\mathfrak{D}_{E^n}$ — сукупність функцій f із $\widehat{\mathrm{C}}(E^n)$ таких, що для будь-якого $K = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathfrak{S}^n$ і для довільного $P^i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i \cup \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_p) \in \mathfrak{S}_K^-$ справедливо

$$\Delta_K f_K\Big|_{y_i = y_{i+1}} = \Delta_{P^i} f_{P^i}. \tag{1.17}$$

На множині $\mathfrak{D}_{E^n}$ оператор $\mathfrak{G}_{E^n}$ матиме вигляд

$$\mathfrak{G}_{E^n} f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} \Delta_n f(x_1, \ldots, x_n),$$

де Δ_n — n-вимірний оператор Лапласа.

Зауваження 1.4.2. *Для довільної функції $f \in \mathfrak{D}_{E^n}$ та довільного $K \in \mathfrak{S}^n$ має місце рівність*

$$\Delta_n f\Big|_{S_K^n} = \Delta_K f_K,$$

де звуження робиться поступово, переходячи з однієї грані на іншу до тих пір, поки не доберемось до S_K^n.

Надалі, говорячи про оператор $\mathfrak{G}_{E^n}$, будемо вважати, що його областю визначення є множина $\mathfrak{D}_{E^n}$, якщо не сказано іншого.

Теорема 1.4.1. *Замикання* $\overline{\mathfrak{G}}_{E^n}$ *лінійного оператора* $\mathfrak{G}_{E^n}$ *в просторі* $\mathrm{C}_0(E^n)$ *є генератором напівгрупи* $\{T_t,\ t \geq 0\}$.

Доведення. Перевіримо спочатку, що замикання $\mathfrak{G}_{E^n}$ є генератором деякої напівгрупи. Для цього використаємо теорему 4.2.2 [22, ст. 165]. Покажемо, що для деякого $\lambda > 0$ множина значень $R(\lambda I - \mathfrak{G}_{E^n})$ оператора $\lambda I - \mathfrak{G}_{E^n}$ щільна в $\mathrm{C}_0(E^n)$. Тут I — тотожній оператор. Візьмемо $g \in \mathrm{C}_0^{\alpha}(E^n)$, деяке $\lambda > 0$ і розглянемо рівняння

$$\lambda f - \mathfrak{G}_{E^n} f = g. \tag{1.18}$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо серед функцій у множині $\mathfrak{D}_{E^n}$. Оскільки функція f повинна бути неперервною і задовольняти умову (1.17), то рівняння (1.18) еквівалентне набору рівнянь еліптичного типу

$$\lambda h^K(y) - \Delta_K h^K(y) = g_K(y), \quad y \in E^p, \tag{1.19}$$

$$h^K(y_1, \ldots, y_p)\big|_{y_i = y_{i+1}} = h^{P^i}(y_1, \ldots, y_i, y_{i+2}, \ldots, y_p), \tag{1.20}$$

де $K = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathfrak{S}^n$, $P^i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i \cup \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_p) \in \mathfrak{S}_K^-$, $i = 1, \ldots, p-1$, причому f та h^K, $K \in \mathfrak{S}^n$, зв'язані рівністю $h^K = f_K$. Оскільки (1.19) є еліптичним рівнянням в області E^p з неперервними крайовими умовами (1.20), то задача (1.19), (1.20) має єдиний розв'язок (див. Теорема 6.13 [25, ст. 107]). Можливість неперервного продовження похідних до другого порядку включно функцій f_K випливає з леми 6.18 [25, ст. 112] про регулярність розв'язку рівняння еліптичного типу поблизу границі. Це доводить рівність $\overline{R(\lambda I - \mathfrak{G}_{E^n})} = \mathrm{C}_0(E^n)$. Легко бачити, що $\mathfrak{G}_{E^n}$ задовольняє принцип максимального значення на множині $\mathfrak{D}_{E^n}$. Крім того, ця множина є щільною в $\mathrm{C}_0(E^n)$. Звідси $\overline{\mathfrak{G}}_{E^n}$ — генератор деякої напівгрупи. Те, що $\overline{\mathfrak{G}}_{E^n}$ породжує напівгрупу $\{T_t,\ t \geq 0\}$, випливає з теореми 4.4.1 [22, ст. 182]. □

З отриманої теореми випливає, що оператор $\mathfrak{G}_{E^n}$ однозначно задає напівгрупу операторів $\{T_t,\ t \geq 0\}$ (див. Твердження 1.2.9 [22, ст. 15]), яка в свою чергу визначає процес важких дифузійних частинок. Потрібно відмітити, що теорема 4.4.1 [22, ст. 182] дозволяє задавати марковський процес за допомогою генератора (не знаходячи явного вигляду напівгрупи), використовуючи так звану проблему мартингалів. Крім того, у багатьох випадках саме за допомогою проблеми мартингалів легко знайти вигляд генератора марковського процесу. І саме для нескінченної кількості частинок, яка вивчатиметься у наступних розділах, буде задаватись генератор за допомогою проблеми мартингалів. У зв'язку з цим поговоримо про проблему мартингалів для процесу важких дифузійних частинок.

Нагадаємо означення проблеми мартингалів [22, ст. 173]. Нехай неперервний випадковий процес X приймає значення в деякому метричному просторі (E, r) і A — лінійний оператор, заданий на деякому підпросторі $\mathfrak{D}(A)$ (не обов'язково замкненому) обмежених вимірних функцій на E.

Означення 1.4.1. *Неперервний процес X називатимемо розв'язком $(A, \mathfrak{D}(A))$-проблеми мартингалів, якщо для довільної функції $f \in \mathfrak{D}(A)$*

$$f(X(t)) - f(X(0)) - \int_0^t Af(X(s))ds$$

— мартингал. Якщо, крім того, два довільні розв'язки X та Y $(A, \mathfrak{D}(A))$-проблеми мартингалів мають однаковий розподіл, то говорять, що X (або Y) є єдиним розв'язком $(A, \mathfrak{D}(A))$-проблеми мартингалів.

З теореми про єдиність розв'язку проблеми мартингалів для генератора марковського процесу (Теорема 4.4.1 [22, ст. 182]) та теореми 1.4.1 випливає наступне твердження.

Твердження 1.4.2. *Процес важких дифузійних частинок є единим розв'язком* $(\mathfrak{G}_{E^n}, \mathfrak{D}_{E^n})$*-проблеми мартингалів.*

З останнього твердження та Теореми 4.4.2 [22, ст. 192] випливає наслідок.

Наслідок 1.4.1. *Процес важких дифузійних частинок є строго марковським процесом у просторі* E^n*.*

Зауважимо, що в останньому розділі нам доведеться інтегрувати функції із $\mathfrak{D}_{E^n}$ по локально скінченним мірам. Оскільки відображення із $\mathfrak{D}_{E^n}$ лише зануляються на нескінченності, то такі інтеграли, взагалі кажучи, розбіжні. У такому випадку нам потрібно вміти розв'язувати проблему мартингалів у випадку, коли генератор заданий на функціях з компактним носієм.

Отже, позначимо

$$\mathfrak{D}^0_{E^n} = \{f \in \widehat{\mathrm{C}}(E^n) : \; f \; - \; \text{має компактний носій}\}.$$

З твердження 1.4.2 та теореми 4.6.2 [22, ст. 217] отримаємо.

Твердження 1.4.3. *Процес важких дифузійних частинок є единим розв'язком* $(\mathfrak{G}_{E^n}, \mathfrak{D}^0_{E^n})$*-проблеми мартингалів.*

Висновки до розділу 1

1. Побудована математична модель скінченного числа взаємодіючих частинок на прямій. Кожна частинка, маючи масу, рухається у випадковому середовищі незалежно по відношенню до інших частинок до моменту зіткнення. При зіткненні частинки склеюються, а їхня маса сумується.
2. Перевірена марковська властивість процесу, що описує рух нашої системи частинок, та знайдено вигляд його генератора.

Побудова випадкового процесу, який задає рух скінченного числа частинок, міститься у роботі автора [13], а марковська властивість та вигляд його генератора описані у роботі автора [15].

РОЗДІЛ 2
НЕСКІНЧЕННІ СИСТЕМИ ВЗАЄМОДІЮЧИХ ДИФУЗІЙНИХ ЧАСТИНОК

У даному розділі побудована математична модель нескінченної кількості частинок, які при зіткненні склеюються, змінюючи свою масу. Встановлено умови, які потрібно накладати на точки старту частинок та їхні маси, для того, щоб існувала така математична модель. Перевірено, що ця система володіє марковською властивістю та розв'язана для неї проблема мартингалів. Також у даному розділі вивчено випадок стаціонарного старту частинок і показано, що маса, яка переноситься, має стаціонарний розподіл.

2.1 Існування нескінченної системи, яка стартувала з детермінованих точок і мас

Метою даного пункту є побудова системи процесів, які описують поведінку нескінченного числа частинок. Потрібно відмітити, що основна складність побудови такої системи полягає у тому, що за рахунок зміни коефіцієнта дифузії при склеюванні рух кожної скінченної сукупності частинок уже не може бути описаний без урахування впливу інших (вони можуть приклеїтись до виділених нами). Цю складність ми подолаємо наступним чином: система процесів, яка відповідає всій нескінченній кількості частинок, буде отримана як границя при збільшенні об'єму скінченної сукупності частинок. Сформулюємо основний результат цього пункту.

Теорема 2.1.1. *Нехай послідовності дійсних чисел* $\{x_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *та* $\{a_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *задовольняють наступні умови:*

$1^\star)$ *для довільного* $k \in \mathbb{Z}$ $\quad a_k > 0, \quad x_k < x_{k+1};$

2*) *існують послідовність* $\{n_i,\ i \in \mathbb{Z}\}$ *та стала* $C > 0$ *такі, що для будь-якого* $i \in \mathbb{Z}$ $a_{n_i+1} \wedge a_{n_i} \geq C$, $x_{n_i+1} - x_{n_i} \geq C$, $n_0 = 0$.

Тоді існує система випадкових процесів $\{x_k(t),\ k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$ *така, що:*

1°) *для довільного* $k \in \mathbb{Z}$ *процес* $x_k(\cdot)$ *— неперервний квадратично інтегровний мартингал відносно потоку* σ*-алгебр*

$$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} = (\sigma(x_k(s),\ s \leq t,\ k \in \mathbb{Z}))_{t\geq 0}\,;$$

2°) $x_k(0) = x_k,\ k \in \mathbb{Z}$;

3°) *для довільних* $l < k$ *та довільного* $t \geq 0$ *виконується нерівність* $x_l(t) \leq x_k(t)$;

4°) *для довільного* $t \geq 0$ *квадратична характеристика*

$$\langle x_k(\cdot)\rangle_t = \int\limits_0^t \frac{ds}{m_k(s)},$$

де

$$m_k(t) = \sum_{i \in M_k(t)} a_i,$$

$$M_k(t) = \{i \in \mathbb{Z} :\ \exists\ s \leq t,\ x_k(s) = x_i(s)\};$$

5°) *сумісна характеристика*

$$\langle x_l(\cdot), x_k(\cdot)\rangle_t\ \mathbb{I}_{\{t<\tau_{l,k}\}} = 0,$$

де $\tau_{l,k} = \inf\{t :\ x_l(t) = x_k(t)\}$.

Умови 1°)–5°) *однозначно визначають розподіл* $(\ldots, x_{-n}(\cdot), \ldots, x_n(\cdot), \ldots)$ *у просторі* $\big((\mathrm{C}(\mathbb{R}^+))^{\mathbb{Z}},\ \mathcal{B}((\mathrm{C}(\mathbb{R}^+))^{\mathbb{Z}})\big)$.

Доведення. Для доведення теореми спочатку для довільного $n \in \mathbb{N}$ задамо спеціальним чином процес важких дифузійних частинок $(x^n_{-n}(\cdot), \ldots, x^n_n(\cdot))$ у просторі E^{2n+1}. Далі перейдемо до границі при $n \to \infty$ і покажемо, що гранична сукупність процесів $\{x_k(t),\ k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$ задовольняє потрібні властивості.

На деякому ймовірносному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ розглянемо сукупність незалежних вінерівських процесів $\{w_k(t),\ k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$. Із цієї сукупності побудуємо систему процесів $\{x_k^n(t),\ k = -n, \ldots, n,\ t \geq 0\}$.

Позначимо $a^n = (a_{-n}, \ldots, a_n)$, $B^n = \{n_i : |n_i| \leq n,\ i \in \mathbb{Z}\} \cup \{n_i + 1 : |n_i + 1| \leq n,\ i \in \mathbb{Z}\}$ та $C^n = \{-n, \ldots, n\} \setminus B^n$. Впорядкуємо множини B^n та C^n у порядку неспадання абсолютних значень їхніх елементів. Нехай це буде $(b_1, \ldots, b_{|B^n|})$ і $(c_1, \ldots, c_{|C^n|})$ відповідно. Візьмемо $q = (q_1, \ldots, q_{2n+1}) = (b_1, \ldots, b_{|B^n|}, c_1, \ldots, c_{|C^n|})$. За допомогою q задамо порядок склеювання $p^n = (p_1^n, \ldots, p_{2n+1}^n)$. Позначимо $p_{q_i}^n = i,\ \ i = 1, \ldots, 2n+1$. Візьмемо

$$(x_{-n}^n(\cdot), \ldots, x_n^n(\cdot)) = \widehat{F}_{2n+1}^{a^n, p^n}(x_{-n} + w_{-n}, \ldots, x_n + w_n). \tag{2.1}$$

Наведемо одну властивість відображення $\widehat{F}_{2n+1}^{a^n,p^n}$, $n \in \mathbb{N}$, з якої буде випливати існування границі послідовності $\{x_k^n(\cdot)\}_{n \geq |k|}$, $k \in \mathbb{Z}$, при $n \to \infty$.

Лема 2.1.1. *Нехай* $\{f_k,\ k \in \mathbb{Z}\} \subset C[0, \infty)$, $f_k(0) = x_k$ *і*

$$(g_{-n}^n, \ldots, g_n^n) = \widehat{F}_{2n+1}^{a^n,p^n}(f_{-n}, \ldots, f_n), \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

1. *Якщо для деякого* $m \in \mathbb{N}$ *існують* $C > 0$ *і* $\delta > 0$ *такі, що*

$$\max\left\{\max_{t \in [0,T]} f_k(t),\ k \in \{n_i, n_j + 1,\ i = 0, \ldots, m,\ j = 0, \ldots, m-1\}\right\} < C,$$

$$\min_{t \in [0,T]} f_{n_m+1}(t) > C + \delta,$$

то для довільних $l > n_m$ *і* $k = -l, \ldots, n_m$

$$\max_{t \in [0,T]} g_k^l(t) \leq \max_{t \in [0,T]} g_{n_m}^l(t) < C, \quad \min_{t \in [0,T]} g_{n_m+1}^l(t) > C + \delta.$$

2. Якщо для деякого $-m \in \mathbb{N}$ *існують* $C < 0$ *і* $\delta < 0$ *такі, що*

$$\min\left\{\min_{t\in[0,T]} f_k(t),\ k \in \{n_i, n_j+1,\ i = m+1,\dots,0,\right.$$
$$\left. j = m,\dots,0\}\right\} > C,$$

$$\max_{t\in[0,T]} f_{n_m}(t) < C + \delta,$$

то для довільних $l > -n_m$ *і* $k = n_m+1,\dots,l$

$$\min_{t\in[0,T]} g_k^l(t) \ge \min_{t\in[0,T]} g_{n_m+1}^l(t) > C, \quad \max_{t\in[0,T]} g_{n_m}^l(t) < C + \delta.$$

Доведення безпосередньо випливає із конструкції відображень $\widehat{F}_{2n+1}^{a^n,p^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}$ покажемо, що існує границя послідовності $\{x_k^n(\cdot)\}_{n\ge|k|}$, і візьмемо її в якості $x_k(\cdot)$. Для цього сформулюємо допоміжну лему.

Лема 2.1.2. *Нехай* $\{w_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ *— сукупність незалежних стандартних вінерівських процесів, послідовності дійсних чисел* $\{y_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ *та* $\{b_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ *такі, що*

1) для довільного $k \in \mathbb{N}$ $y_k < y_{k+1}$*;*

2) існує $C > 0$ *таке, що для будь-якого* $k \in \mathbb{N}$ $b_k \ge C$, $y_{k+1} - y_k \ge C$.

Позначимо

$$\xi_k = \max_{t\in[0,T]}\left\{y_k + \frac{1}{\sqrt{b_k}} w_k(t)\right\},$$
$$\eta_k = \min_{t\in[0,T]}\left\{y_k + \frac{1}{\sqrt{b_k}} w_k(t)\right\}.$$

Тоді для довільного $\delta \in (0, \frac{C}{2})$

$$\mathbb{P}\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\max_{k=1,\dots,n} \xi_k \le y_n + \frac{C}{2},\ \eta_{n+1} > y_n + \frac{C}{2} + \delta\right\}\right\} = 1.$$

Доведення. Нехай $\delta, \varepsilon \in (0, \frac{C}{2})$. Оскільки $\{\xi_k,\ k = 1, \ldots, N\}$ та η_{N+1} незалежні, то, використовуючи розподіл максимуму для вінерівського процесу (див. Твердження 2.9 [16, ст. 94]),

$$\mathbb{P}\left\{\max_{k=1,\ldots,N} \xi_k \le y_N + \frac{C}{2} - \varepsilon,\ \eta_{N+1} > y_N + \frac{C}{2} + \delta\right\} =$$
$$= \prod_{k=1}^{N}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int\limits_0^{y_N - y_k + \frac{C}{2} - \varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx\right) \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int\limits_0^{y_{N+1} - y_N - \frac{C}{2} - \delta} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \ge$$
$$\ge \prod_{k=1}^{N}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int\limits_0^{C(N-k) + \frac{C}{2} - \varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx\right) \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int\limits_0^{\frac{C}{2} - \delta} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx =$$
$$= \prod_{k=0}^{N-1}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int\limits_0^{Ck + \frac{C}{2} - \varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx\right) \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int\limits_0^{\frac{C}{2} - \delta} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx =$$

$$= \prod_{k=0}^{N-1}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int\limits_{Ck + \frac{C}{2} - \varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx\right) \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int\limits_0^{\frac{C}{2} - \delta} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx. \qquad (2.2)$$

Зауважимо, що добуток в (2.2) збігається до додатного числа при $N \to \infty$, оскільки $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \int\limits_k^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \le \int\limits_1^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2T}} dx < \infty$. Позначимо

$$p = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int\limits_{Ck + \frac{C}{2} - \varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx\right) \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int\limits_0^{\frac{C}{2} - \delta} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx.$$

Візьмемо $p_1 \in (0, p)$. Тоді

$$\exists\, N_1 > 0 \quad \mathbb{P}\left\{\max_{k=1,\ldots,N_1} \xi_k \le y_{N_1} + \frac{C}{2} - \varepsilon,\ \eta_{N_1+1} > y_{N_1} + \frac{C}{2} + \delta\right\} \ge p_1.$$

Маємо

$$\mathbb{P}\left\{\max_{k=N_1+2,\ldots,N} \xi_k \le y_N + \frac{C}{2} - \varepsilon,\ \eta_{N+1} > y_N + \frac{C}{2} + \delta\right\} \ge$$

$$\geq \prod_{k=N_1+2}^{N} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int\limits_0^{C(N-k)+\frac{C}{2}-\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \right) \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int\limits_0^{\frac{C}{2}-\delta} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx =$$

$$= \prod_{k=0}^{N-N_1-2} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int\limits_0^{Ck+\frac{C}{2}-\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \right) \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int\limits_0^{\frac{C}{2}-\delta} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \to p$$

при $N \to \infty$. Відповідно існує $N_2' > N_1 + 2$ таке, що для довільного $N \geq N_2'$

$$\mathbb{P}\left\{ \max_{k=N_1+2,\dots,N} \xi_k \leq y_N + \frac{C}{2} - \varepsilon,\ \eta_{N+1} > y_N + \frac{C}{2} + \delta \right\} \geq p_1.$$

Нехай $\zeta_N^{(N_0)} = \max\limits_{k=1,\dots,N} \xi_k - \max\limits_{k=N_0,\dots,N} \xi_k$, $N, N_0 \in \mathbb{N}$, $N > N_0$. Тоді для довільного $N_0 \in \mathbb{N}$

$$\zeta_N^{(N_0)} \to 0 \quad \mathbb{P}-\text{м.н.} \quad \text{при } N \to \infty,$$

а значить, для довільного $\varepsilon_1 > 0$

$$\mathbb{P}\left\{ \zeta_N^{(N_0)} \leq \varepsilon_1 \right\} \to 1, \quad N \to \infty.$$

Використовуючи збіжність послідовності $\{\zeta_N^{(N_0)}\}_{N>N_0}$ за ймовірністю, отримаємо, що існує $N_2'' > N_1 + 2$ таке, що для довільного $N \geq N_2''$ виконується нерівність $\mathbb{P}\left\{ \zeta_N^{(N_1+2)} \leq \varepsilon \right\} > 1 - \frac{1}{2}$. Візьмемо $N_2 = N_2' \vee N_2''$.

За допомогою математичної індукції побудуємо послідовність індексів $\{N_m\}_{m\geq 1}$. Існує $N_{m+1}' > N_m + 2$ таке, що для довільного $N \geq N_{m+1}'$

$$\mathbb{P}\left\{ \max_{k=N_m+2,\dots,N} \xi_k \leq y_N + \frac{C}{2} - \varepsilon,\ \eta_{N+1} > y_N + \frac{C}{2} + \delta \right\} \geq p_1.$$

Крім того, існує $N_{m+1}'' > N_m + 2$ таке, що для довільного $N \geq N_{m+1}''$

$$\mathbb{P}\left\{ \zeta_N^{(N_m+2)} \leq \varepsilon \right\} > 1 - \frac{1}{2^m}.$$

Візьмемо $N_{m+1} = N'_{m+1} \vee N''_{m+1}$. Використовуючи лему Бореля-Кантеллі [26, ст. 271], отримаємо

$$\mathbb{P}\Big\{\forall M\ \exists m \geq M \max_{k=N_m+2,\ldots,N_{m+1}} \xi_k \leq y_{N_{m+1}} + \frac{C}{2} - \varepsilon,$$
$$\eta_{N_{m+1}+1} > y_{N_{m+1}} + \frac{C}{2} + \delta\Big\} = 1$$

та

$$\mathbb{P}\Big\{\exists M\ \forall m \geq M\ \zeta_{N_{m+1}}^{(N_m+2)} \leq \varepsilon\Big\} = 1.$$

Звідси

$$\mathbb{P}\Big\{\forall M\ \exists m \geq M \max_{k=1,\ldots,N_{m+1}} \xi_k \leq y_{N_{m+1}} + \frac{C}{2},$$
$$\eta_{N_{m+1}+1} > y_{N_{m+1}} + \frac{C}{2} + \delta\Big\} \geq$$
$$\mathbb{P}\Big\{\forall M\ \exists m \geq M \max_{k=1,\ldots,N_{m+1}} \xi_k - \max_{k=N_m+2,\ldots,N_{m+1}} \xi_k \leq \varepsilon,$$
$$\max_{k=N_m+2,\ldots,N_{m+1}} \xi_k \leq y_{N_{m+1}} + \frac{C}{2} - \varepsilon,\ \eta_{N_{m+1}+1} > y_{N_{m+1}} + \frac{C}{2} + \delta\Big\} \geq$$
$$\mathbb{P}\Big\{\Big\{\exists M\ \forall m \geq M \max_{k=1,\ldots,N_{m+1}} \xi_k - \max_{k=N_m+2,\ldots,N_{m+1}} \xi_k \leq \varepsilon\Big\} \cap$$
$$\cap \Big\{\forall M\ \exists m \geq M \max_{k=N_m+2,\ldots,N_{m+1}} \xi_k \leq y_{N_{m+1}} + \frac{C}{2} - \varepsilon,$$
$$\eta_{N_{m+1}+1} > y_{N_{m+1}} + \frac{C}{2} + \delta\Big\}\Big\} = 1.$$

□

Нехай тепер $\{x_k^n(t),\ k = -n,\ldots,n,\ t \geq 0\}$ — набір випадкових процесів, які задані формулою (2.1). Із леми 2.1.1 та леми 2.1.2 випливає, що для довільного $k \in \mathbb{Z}$ і $T > 0$

$$\mathbb{P}\{\exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall t \in [0,T]\ \ x_k^n(t) = x_k^N(t)\} = 1,$$

тобто для кожного цілого k послідовність $\{x_k^n(\cdot)\}_{n\geq|k|}$ стабілізується на $[0,T]$ з ймовірністю 1. В якості $x_k(\cdot)$ візьмемо границю $\{x_k^n(\cdot)\}_{n\geq|k|}$. Далі з леми 1.2.1 випливає, що

$$x_k^n(t) = x_k + \int_0^t \frac{d\widetilde{w}_k^n(s)}{\sqrt{m_k^n(s)}},$$

де $\{\widetilde{w}_k^n,\ k=-n,\ldots,n\}$ — сукупність стандартних вінерівських процесів таких, що

$$\langle \widetilde{w}_l^n, \widetilde{w}_k^n\rangle_t = \mathbb{I}_{\{t\ge\tau_{l,k}^n\}}(t-\tau_{l,k}^n),$$

$$\tau_{l,k}^n = \inf\{t:\ x_l^n(t)=x_k^n(t)\}.$$

Аналогічно, як для послідовності $\{x_k^n(\cdot)\}_{n\ge|k|}$, можна показати наступну рівність

$$\mathbb{P}\{\exists\ N\in\mathbb{N}\ \ \forall n\ge N\ \forall t\in[0,T]\ \ \widetilde{w}_k^n(t)=\widetilde{w}_k^N(t)\}=1.$$

Візьмемо в якості $\widetilde{w}_k$ границю послідовності $\{\widetilde{w}_k^n\}_{n\ge|k|}$. Зрозуміло, що $\{\widetilde{w}_k,\ k\in\mathbb{Z}\}$ — система стандартних вінерівських процесів таких, що

$$\langle \widetilde{w}_l, \widetilde{w}_k\rangle_t = \mathbb{I}_{\{t\ge\tau_{l,k}\}}(t-\tau_{l,k}).$$

Крім того,

$$x_k(t)=x_k+\int\limits_0^t \frac{d\widetilde{w}_k(s)}{\sqrt{m_k(s)}}.$$

Звідси випливає, що система $\{x_k(t),\ k\in\mathbb{Z},\ t\ge 0\}$ задовольняє умови 1°)—5°).

Доведемо другу частину теореми 2.1.1. Нехай $\{x_k(t),\ k\in\mathbb{Z},\ t\ge 0\}$ задовольняє умови 1°)—5°). Візьмемо для довільного $k\in\mathbb{Z}$

$$w_k'(t)=\int\limits_0^t \sqrt{m_k(s)}dx_k(s).$$

В силу теореми Леві (див. Теорема 2.6.1 [18, ст. 81]) $\{w_k',\ k\in\mathbb{Z}\}$ — система стандартних вінерівських процесів. Аналогічно, як у доведенні теореми 1.2.1, до траєкторій процесів w_k' можна доклеїти незалежні вінерівські процеси так, щоб нова система $\{w_k,\ k\in\mathbb{Z}\}$ складалась зі стандартних незалежних вінерівських процесів і

$$x_k(\cdot)=\lim_{n\to\infty} x_k^n(\cdot),$$

де

$$(x_{-n}^n(\cdot), \dots, x_n^n(n, \cdot)) = \widehat{F}_{2n+1}^{a^n, p^n}(x_{-n} + w_{-n}, \dots, x_n + w_n).$$

Звідси випливає доведення другої частини теореми. □

Означення 2.1.1. *Сукупність процесів* $\{x_k(t),\ k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$*, яка задовольняє умови* $1^\circ)$–$5^\circ)$ *теореми 2.1.1, називатимемо системою важких дифузійних частинок.*

Зауваження 2.1.1. *Для фіксованої послідовності* $\{n_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ *правило, яке послідовності* $(x_k + w_k(\cdot))_{k\in\mathbb{Z}}$ *ставить у відповідність послідовність* $(x_k(\cdot))_{k\in\mathbb{Z}}$*, позначимо через* $F^{a,\{n_j\}}$*.*

Позначимо символом $\mathcal{K}$ множину елементів вигляду $(a, x) = ((a_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (x_k)_{k\in\mathbb{Z}})$, де послідовності $\{x_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ та $\{a_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ задовольняють умови $1^\star)$, $2^\star)$ теореми 2.1.1.

Лема 2.1.3. $\mathcal{K}$ *— вимірна підмножина* $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$*.*

Доведення. Зрозуміло, що

$$\mathcal{K} = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} \{(a, x) : x_k \leq x_{k+1}\} \cap \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} \{(a, x) : a_k > 0\} \cap \\ \cap \left\{(a, x) : \overline{\lim_{k\to+\infty}} [a_k \wedge a_{k+1} \wedge (x_{k+1} - x_k)] > 0\right\} \cap \\ \cap \left\{(a, x) : \overline{\lim_{k\to-\infty}} [a_k \wedge a_{k+1} \wedge (x_{k+1} - x_k)] > 0\right\}.$$

Для доведення леми достатньо показати, що $\{(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \overline{\lim_{k\to+\infty}} x_k > 0\}$ є вимірною підмножиною $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Розглянемо відображення

$$\Gamma_1((x_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = \left(\sup_{r\geq k} x_r\right)_{k\in\mathbb{Z}}$$

та

$$\Gamma_2((x_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = \inf_{k\geq 0} x_k.$$

Очевидно, що Γ_1, Γ_2 — вимірні відображення. Звідси

$$\{(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \overline{\lim_{k\to+\infty}} x_k > 0\} = \{(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \Gamma_2 \circ \Gamma_1((x_k)_{k\in\mathbb{Z}}) > 0\}$$

є вимірною множиною. □

Надалі вважатимемо, що $\mathcal{K}$ є вимірним підпростором простору $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

Візьмемо $(a, x) \in \mathcal{K}$. Нехай $\{n_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ — впорядкована по зростанню послідовність чисел $\left\{k:\ a_k \wedge a_{k+1} \wedge (x_{k+1} - x_k) > \frac{\delta}{2}\right\}$, де

$$\delta = \overline{\lim_{k\to+\infty}}[a_k \wedge a_{k+1} \wedge (x_{k+1} - x_k)] \wedge \overline{\lim_{k\to-\infty}}[a_k \wedge a_{k+1} \wedge (x_{k+1} - x_k)].$$

Розглянемо випадкове поле

$$X(a, x) = F^{a,\{n_j\}}((x_k + w_k(\cdot))_{k\in\mathbb{Z}}). \tag{2.3}$$

З твердження 1.1.1 та доведення попередньої теореми випливає наступне твердження

Твердження 2.1.1. *Відображення* $X : \mathcal{K} \times \mathbb{R}^{+} \times \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ *є вимірним.*

2.2 Марковські властивості нескінченної системи

У попередньому пункті нами побудовано сукупність процесів, які описують рух взаємодіючих частинок, що стартували зі зліченної множини точок прямої, рухаються незалежно до моменту зіткнення, потім склеюються і, сумуючи свою масу, рухаються разом. У даному пункті ми вивчимо марковську властивість цієї системи. Для цього спочатку визначимо випадковий процес у деякому метричному просторі, який би описував поведінку нашої сукупності частинок. Після цього покажемо що він є марковським процесом.

Нехай $\{x_k(t),\ k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$ — система важких дифузійних частинок. Розглянемо процес

$$X_{\cdot}(x) = (x_k(\cdot))_{k\in\mathbb{Z}},$$

значеннями якого є неспадні послідовності. Тут $x = (x_k(0))_{k\in\mathbb{Z}}$. Відмітимо, що не для довільної неспадної послідовності $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ існує система важких дифузійних частинок $\{x_k(t),\ k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$, що стартує з $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, тобто $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (x_k(0))_{k\in\mathbb{Z}}$, тому ми розглядатимемо тільки деяку підмножину множини неспадних послідовностей.

Позначимо символом $\mathcal{M}$ множину неспадних послідовностей $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ таких, що

$$\lim_{k\to\pm\infty} \frac{x_k}{k} = 1. \tag{2.4}$$

Відмітимо, що умова (2.4) дає змогу для довільної точки із $\mathcal{M}$ будувати систему важких дифузійних частинок, які стартували з неї і в момент старту мали одиничну масу, тобто $a_k = 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Вірна наступна лема.

Лема 2.2.1. *Для довільного $x \in \mathcal{M}$ існує система важких дифузійних частинок $\{x_k(t),\ k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$ така, що $a_k = 1$, $k \in \mathbb{Z}$ і $x = (x_k(0))_{k\in\mathbb{Z}}$.*

Доведення. Нехай $x \in \mathcal{M}$, тоді з умови (2.4) випливає, що існує послідовність $\{n_i,\ i \in \mathbb{Z}\}$ така, що

$$\inf\{x_{n_i+1} - x_{n_i},\ i \in \mathbb{Z}\} > 0.$$

Звідси та з теореми 2.1.1 випливає твердження леми. $\square$

Далі введемо метрику на $\mathcal{M}$

$$\rho((x_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = \max_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |k|}.$$

Має місце наступна лема.

Лема 2.2.2. $(\mathcal{M}, \rho)$ — *повний сепарабельний метричний простір.*

Доведення. Розглянемо метричний простір $\mathbb{R} \times c^2$, де c — простір збіжних послідовностей з метрикою

$$d((a^1, (b_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n^1)_{n\in\mathbb{N}}), (a^2, (b_n^2)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n^2)_{n\in\mathbb{N}})) =$$
$$= |a^1 - a^2| \vee \max_{n\in\mathbb{N}} |b_n^1 - b_n^2| \vee \max_{n\in\mathbb{N}} |c_n^1 - c_n^2|.$$

Оскільки простори $\mathbb{R}$ та c є повними сепарабельними метричними просторами, то $(\mathbb{R} \times c^2, d)$ також повний і сепарабельний.

Візьмемо

$$\Upsilon((x_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = \left(x_0, \left(\frac{x_n}{1+n} \right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\frac{x_{-n}}{1+n} \right)_{n\in\mathbb{N}} \right).$$

Відображення Υ встановлює ізометрію між $\mathcal{M}$ та замкненою підмножиною простору $\mathbb{R} \times c^2$. Оскільки замкнена підмножина повного сепарабельного метричного простору згідно леми 1.6.7 [27, ст. 31] та теореми 1.6.12 [27, ст. 32] є знову повним та сепарабельним метричним простором, то звідси випливає доведення леми. □

У побудованому тільки-що просторі $\mathcal{M}$ будемо задавати еволюцію нашої системи.

Означення 2.2.1. *Випадковий процес* $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *зі значеннями в* $\mathcal{M}$ *називаєтьcя процесом важких дифузійних частинок в* $\mathcal{M}$*, якщо існує система важких дифузійних частинок* $\{x_k(t),\ k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$ *така, що* $a_k = 1$*,* $k \in \mathbb{Z}$*, і для довільного* $t \geq 0$ $X_t = (x_k(t))_{k\in\mathbb{Z}}$.

Доведемо твердження про існування процесу важких дифузійних частинок у просторі $\mathcal{M}$.

Твердження 2.2.1. *Для довільного* $x \in \mathcal{M}$ *існує неперервний процес важких дифузійних частинок в* $\mathcal{M}$ $\{X_t(x),\ t \geq 0\}$ *такий, що* $X_0(x) = x$.

Доведення. Згідно леми 2.2.1 візьмемо систему важких дифузійних частинок $\{x_k(t),\ k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$, яка стартувала з x із одиничними масами, тобто $(x_k(0))_{k\in\mathbb{Z}} = x$ та $a_k = 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Покажемо, що процес

$$X_t(x) = (x_k(t))_{k\in\mathbb{Z}},$$

побудований за допомогою цієї системи, є процесом важких дифузійних частинок в $\mathcal{M}$. Для цього спочатку доведемо, що знайдеться множина $\Omega' \subseteq \Omega$ така, що $\mathbb{P}\{\Omega'\} = 1$ і для довільного $\omega \in \Omega'$ та

$t \geq 0$ $X_t(x, \omega) \in \mathcal{M}$. Позначимо $\widetilde{x}_k(t) = x_k(t) - x_k$, $k \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$, і розглянемо

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k(t)}{1+|k|} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{x_k}{1+|k|} + \frac{\widetilde{x}_k(t)}{1+|k|} \right) = \\ = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{1+|k|} + \lim_{k\to\infty} \frac{\widetilde{x}_k(t)}{1+|k|}. \quad (2.5)$$

Оскільки $x \in \mathcal{M}$, то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{1+|k|} = 1.$$

Покажемо, що друга границя в (2.5) дорівнює нулю. Для довільного $T > 0$ доведемо, що

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{k\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \frac{|\widetilde{x}_k(t)|}{1+|k|} = 0 \right\} = 1. \quad (2.6)$$

Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і розглянемо

$$\mathbb{P} \left\{ \max_{t\in[0,T]} \frac{|\widetilde{x}_k(t)|}{1+|k|} \geq \varepsilon \right\} = \mathbb{P} \left\{ \max_{t\in[0,T]} |\widetilde{x}_k(t)| \geq \varepsilon(1+|k|) \right\} \leq \\ \leq \frac{1}{\varepsilon^2(1+|k|)^2} \mathbb{E} \left(\max_{t\in[0,T]} |\widetilde{x}_k(t)| \right)^2.$$

Останній перехід вірний в силу нерівності Чебишова. Згідно умов 1°) та 4°) процес $x_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{Z}$, є неперервним квадратично інтегровним мартингалом з характеристикою

$$\langle x_k(\cdot) \rangle_t = \int_0^t \frac{ds}{m_k(s)} \leq t.$$

Отже, $\widetilde{x}_k(\cdot)$ також неперервний квадратично інтегровний мартингал і $\langle \widetilde{x}_k(\cdot) \rangle_t = \langle x_k(\cdot) \rangle_t$. Звідси [18, ст. 117]

$$\mathbb{E} \left(\max_{t\in[0,T]} |\widetilde{x}_k(t)| \right)^2 \leq C\, \mathbb{E} \langle x_k(\cdot) \rangle_t \leq Ct.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P} \left\{ \max\limits_{t\in[0,T]} \frac{|\widetilde{x}_k(t)|}{1+|k|} \geq \varepsilon \right\}$ збігається, бо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P} \left\{ \max_{t\in[0,T]} \frac{|\widetilde{x}_k(t)|}{1+|k|} \geq \varepsilon \right\} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{Ct}{\varepsilon^2(1+|k|)^2} < \infty,$$

то згідно леми Бореля-Кантеллі [26, ст. 271]

$$\mathbb{P}\left\{\text{для нескінченної кількості номерів } k \ \max_{t\in[0,T]} \frac{|\widetilde{x}_k(t)|}{1+|k|} \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

Звідси випливає (2.6). Позначимо

$$\Omega_T = \left\{\lim_{k\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \frac{|\widetilde{x}_k(t)|}{1+|k|} = 0\right\},$$

тоді з доведеного $\mathbb{P}\{\Omega_T\} = 1$ для будь-якого $T > 0$. У ролі множини Ω' візьмемо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$.

Доведемо, що для довільного $\omega \in \Omega'$ функція $X_t(x, \omega)$ є неперервною по t у просторі $\mathcal{M}$. Нехай $\omega \in \Omega'$ і послідовність $\{t_n\}_{n\geq 1}$ збігається до t_0 при $n \to \infty$. Покажемо, що $\rho(X_{t_0}(x, \omega), X_{t_n}(x, \omega)) \to 0$ при $n \to \infty$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і розглянемо

$$\rho(X_{t_0}(x,\omega), X_{t_n}(x,\omega)) = \max_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|x_k(t_0,\omega) - x_k(t_n,\omega)|}{1+|k|} \leq$$
$$\leq \max_{|k|\leq N} \frac{|x_k(t_0,\omega) - x_k(t_n,\omega)|}{1+|k|} + \max_{|k|>N} \frac{|x_k(t_0,\omega) - x_k(t_n,\omega)|}{1+|k|} \leq$$
$$\leq \max_{|k|\leq N} \frac{|x_k(t_0,\omega) - x_k(t_n,\omega)|}{1+|k|} + \max_{|k|>N} \frac{|\widetilde{x}_k(t_0,\omega)|}{1+|k|} + \max_{|k|>N} \frac{|\widetilde{x}_k(t_n,\omega)|}{1+|k|}.$$

Спочатку виберемо номер $N \in \mathbb{N}$ так, щоб

$$\max_{|k|>N} \max_{t\in[0,m]} \frac{|\widetilde{x}_k(t,\omega)|}{1+|k|} < \frac{\varepsilon}{3},$$

де $m = \left[\sup\limits_{n\geq 0} t_n\right] + 1$. Це можна зробити в силу вибору ω. Далі, використовуючи те, що для довільного $k \in \mathbb{Z}$ $x_k(t, \omega)$ є неперервними функціями по t, візьмемо $M \in \mathbb{N}$ так, щоб для довільного $n \geq M$

$$\max_{|k|\leq N} \frac{|x_k(t_0,\omega) - x_k(t_n,\omega)|}{1+|k|} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Звідси при $n \geq M$

$$\rho(X_{t_0}(x,\omega), X_{t_n}(x,\omega)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

$\square$

Зауваження 2.2.1. *З доведення твердження видно, що для довільного* $\alpha > \frac{1}{2}$ *та* $T > 0$

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{k\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\frac{|\widetilde{x}_k(t)|}{(1+|k|)^\alpha}=0\right\}=1.$$

Зауваження 2.2.2. *З доведення твердження маємо, що для довільної системи важких дифузійних частинок* $\{x_k(t),\ k\in\mathbb{Z},\ t\geq 0\}$ *такої, що* $a_k = 1$, $k\in\mathbb{Z}$, *і* $(x_k(0))_{k\in\mathbb{Z}}\in\mathcal{M}$ *процес* $X_t = (x_k(t))_{k\in\mathbb{Z}}$ *є неперервним процесом важких дифузійних частинок в* $\mathcal{M}$.

Далі перевіримо строго марковську властивість процесу $\{X_t,\ t\geq 0\}$ у просторі $\mathcal{M}$. Потрібно відмітити, що для доведення марковості ми не можемо піти таким же шляхом, що і в першому розділі. Це пов'язано з тим, що у побудові системи важких дифузійних частинок із системи стандартних незалежних вінерівських процесів бере участь не тільки множина старту $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in\mathcal{M}$, а й послідовність натуральних чисел $\{n_j^x,\ j\in\mathbb{Z}\}$ така, що

$$\inf\{x_{n_i^x+1}-x_{n_i^x},\ i\in\mathbb{Z}\}>0,$$

яка визначає порядок склеювання. Оскільки довільному $x\in\mathcal{M}$ відповідає своя послідовність $\{n_j^x,\ j\in\mathbb{Z}\}$, то ми не вміємо будувати потік $\{X_{s,t}(x),\ x\in\mathcal{M},\ s,t\in[0,+\infty),\ s\leq t\}$ так, щоб для довільних $s\leq r\leq t$

$$X_{r,t}(X_{s,r}(x)) = X_{s,t}(x).$$

У зв'язку з цим, щоб довести строго марковську властивість процесу $\{X_t,\ t\geq 0\}$, ми діятимемо наступним чином. Будемо наближати процес важких дифузійних частинок в $\mathcal{M}$ процесом важких дифузійних частинок в E^n і використовувати строго марковську властивість останніх. Спочатку введемо деякі позначення і доведемо декілька допоміжних лем.

Надалі символом $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ позначатимемо мінімальну σ-алгебру відкритих множин в $(\mathcal{M},\rho)$.

Лема 2.2.3. *σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ міститься в $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}) \cap \mathcal{M}$.*

Доведення. Оскільки $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}) \cap \mathcal{M}$ є σ-алгеброю, то для доведення леми достатньо перевірити, що довільна замкнена куля в $\mathcal{M}$ лежить в $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}) \cap \mathcal{M}$. Візьмемо $x \in \mathcal{M}$ та $\varepsilon > 0$ і розглянемо

$$B[x,\varepsilon] = \{y \in \mathcal{M} : \ \rho(x,y) \le \varepsilon\}.$$

З вигляду метрики ρ маємо

$$B[x,\varepsilon] = \left\{ y \in \mathcal{M} : \ \max_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|x_k - y_k|}{1+|k|} \le \varepsilon \right\} =$$
$$= \mathcal{M} \cap \left(\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ |x_k - y_k| \le \varepsilon(1+|k|) \right\} \right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}) \cap \mathcal{M}\,.$$

□

Далі позначимо символом π_n, $n \in \mathbb{N}$, відображення, яке кожній точці із $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \cup \left(\bigcup_{l=n}^{\infty} \mathbb{R}^{2l+1} \right)$ ставить у відповідність точку із $\mathbb{R}^{2n+1}$ за наступним правилом

$$\pi_n(x_{-l}, \dots, x_l) = (x_{-n}, \dots, x_n)$$

та

$$\pi_n(\dots, x_{-n}, \dots, x_l, \dots) = (x_{-n}, \dots, x_n).$$

Із леми 2.2.3 випливає, що процес $X_\cdot(x)$ є строго марковським, якщо для будь-яких натуральних n, функції $f \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^{2n+1})$ та марковського моменту τ має місце рівність

$$\mathbb{E}\left(f(\pi_n X_{t+\tau}(x)) |\, \mathcal{F}_\tau^{X(x)} \right) = \mathbb{E}\left(f(\pi_n X_t(x)) | X_\tau(x) \right), \qquad (2.7)$$

де $\mathcal{F}_t^{X(x)} = \sigma(X_s(x),\ s \le t)$.

Нехай $X_\cdot^n(x^n)$ — процес важких дифузійних частинок в E^{2n+1} (в даному пункті вважатимемо, що частинки при старті мають одиничну масу, тобто $a_k = 1$), який стартував з $x^n \in \mathbb{E}^{2n+1}$. Для довільної функції $f \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^{2k+1})$ та $n \geq k$ візьмемо

$$\varphi_n^f(t, x^n) = \mathbb{E}(f(\pi_k X_t^n(x^n)))$$

та

$$\varphi^f(t, x) = \mathbb{E}(f(\pi_k X_t(x))).$$

Далі для $x^0 \in \mathcal{M}$ розглянемо відображення ϱ_{x^0}, яке діє з множини $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E^{2n+1}$ в M за наступним правилом

$$\varrho_{x^0}(x_{-n}, \ldots, x_n) = (\ldots, y_{-n}, \ldots, y_n, \ldots),$$

де

$$y_l = x_l, \quad |l| \leq n,$$

$$y_l = x_n \vee x_l^0, \quad l > n,$$

$$y_l = x_n \wedge x_l^0, \quad l < -n.$$

Для зручності запису вважатимемо, що для довільного $x \in \mathcal{M}$ $\varrho_{x^0} x = x$.

Доведемо одну властивість відображень $\varphi_n^f,\ n \in \mathbb{N}$, та φ^f, з якої випливатиме марковість процесу важких дифузійних частинок.

Лема 2.2.4. *Нехай x^0 лежить в $\mathcal{M}$ і послідовність $\{x^n\}_{n\geq 1}$ задовольняє наступні умови:*

1) $x^n \in E^{2n+1}$;

2) для довільного $l \in \mathbb{N}$ $\pi_l x^n \to \pi_l x^0$ при $n \to \infty$.

Тоді

$$\sup_{x \in L} \sup_{t \in [0,T]} |\varphi_n^f(t, \pi_n \varrho_{x^0} x) - \varphi^f(t, \varrho_{x^0} x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

де $L = \{x^n,\ n \geq 1\} \cup \{x^0\}$ і T — довільне додатне число.

Доведення. Нехай $\{w_l(t),\ l \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$ — сукупність незалежних вінерівських процесів. Візьмемо для $n \in \mathbb{N}$

$$X_t^n(\pi_n x^0) = \widehat{F}_{2n+1}^{a^n, p^n}((x_l^0 + w_l(\cdot))_{l=-n,\ldots,n})$$

та

$$X_t(x) = F^{a,\{n_j^x\}}((x_l + w_l(\cdot))_{l\in\mathbb{Z}}),$$

де $a = (\ldots,1,1,1,\ldots)$, $a^n = (1,\ldots,1)$ та p^n —вектор, побудований по $\{n_j^{x^0},\ j\in\mathbb{Z}\}$, як це зроблено у теоремі 2.1.1. З доведення теореми 2.1.1 маємо, що для довільного $l\in\mathbb{N}$ та $T>0$

$$\mathbb{P}\{\exists\ N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ \forall t\in[0,T]\ \ \pi_l X_t^n(\pi_n x) = \pi_l X_t(x)\} = 1. \quad (2.8)$$

Нехай $\varepsilon>0$ і $\delta = \inf\{x^0_{n_i^{x^0}+1} - x^0_{n_i^{x^0}},\ i\in\mathbb{Z}\}$. З леми 2.1.2 випливає, що існує номер $K>k$ (тут k відповідає за кількість змінних функції f, тобто $f\in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^{2k+1})$) такий, що

$$\mathbb{P}\Bigg\{\exists p,q\in\{k,\ldots,K\}:\ \max_{l=0,\ldots,p}\xi_l\leq x^0_{n_p^{x^0}}+\frac{\delta}{2},\ \eta_{p+1}>x^0_{n_p^{x^0}}+\frac{3\delta}{4},$$
$$\min_{l=-q,\ldots,0}\eta_l\geq x^0_{n_{-q}^{x^0}}-\frac{\delta}{2},\ \xi_{-q-1}<x^0_{n_{-q}^{x^0}}-\frac{3\delta}{4}\Bigg\}\geq 1-\frac{\varepsilon}{2\max|f|}, \quad (2.9)$$

де

$$\xi_l = \max_{t\in[0,T]}\{x^0_{n_l^{x^0}} + w_{n_l^{x^0}}(t)\},$$
$$\eta_l = \min_{t\in[0,T]}\{x^0_{n_l^{x^0}} + w_{n_l^{x^0}}(t)\}.$$

Позначимо подію, яка стоїть під знаком ймовірності, через Ω_ε. Далі виберемо номер $M\geq K$ так, щоб для будь-якого $m\geq M$

$$|x_l^m - x_l^0| < \frac{\delta}{8}, \quad l=-K,\ldots,K. \quad (2.10)$$

Для $n\geq K$ та $m\geq M$ оцінимо різницю

$$\sup_{t\in[0,T]}|\varphi_n^f(t,\pi_n\varrho_{x^0}x^m) - \varphi^f(t,\varrho_{x^0}x^m)|\leq$$
$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\,|f(\pi_k X_t^n(\pi_n\varrho_{x^0}x^m)) - f(\pi_k X_t(\varrho_{x^0}x^m))| =$$
$$=\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\,|f(\pi_k X_t^n(\pi_n\varrho_{x^0}x^m)) - f(\pi_k X_t(\varrho_{x^0}x^m))|\,\mathbb{I}_{\Omega_\varepsilon}+$$
$$+\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\,|f(\pi_k X_t^n(\pi_n\varrho_{x^0}x^m)) - f(\pi_k X_t(\varrho_{x^0}x^m))|\,\mathbb{I}_{\Omega_\varepsilon^c}<$$
$$<0+\frac{\varepsilon}{2\max|f|}2\max|f| = \varepsilon\,.$$

Доданок $\sup\limits_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\,|f(\pi_k X_t^n(\pi_n \varrho_{x^0} x^m)) - f(\pi_k X_t(\varrho_{x^0} x^m))|\,\mathbb{I}_{\Omega_\varepsilon}$ рівний нулеві за рахунок (2.9), (2.10) і конструкції $X_\cdot^n(\pi_n \varrho_{x^0} x^m)$ та $X_\cdot(\varrho_{x^0} x^m)$.

З рівності (2.8) випливає існування K' такого, що для будь-якого $n \geq K'$

$$\max_{|m|<M} \sup_{t\in[0,T]} |\varphi_n^f(t, \pi_n \varrho_{x^0} x^m) - \varphi^f(t, \varrho_{x^0} x^m)| < \varepsilon$$

та

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi_n^f(t, \pi_n x^0) - \varphi^f(t, x^0)| < \varepsilon\,.$$

□

Наслідок 2.2.1. *В умовах попередньої леми*

$$\sup_{m\geq 1} \sup_{t\in[0,T]} |\varphi_n^f(t, \pi_n \varrho_{x^0} x^m) - \varphi^f(t, x^0)| \to 0 \text{ \textit{при} } n \to \infty.$$

Доведення. Доведемо спочатку, що $\sup\limits_{t\in[0,T]} |\varphi^f(t, \varrho_{x^0} x^m) - \varphi^f(t, x^0)| \to 0$ при $m \to \infty$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і розглянемо

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} |\varphi^f(t, \varrho_{x^0} x^m) - \varphi^f(t, x^0)| \leq \\
\leq \sup_{t\in[0,T]} |\varphi^f(t, \varrho_{x^0} x^m) - \varphi_n^f(t, \pi_n \varrho_{x^0} x^m)| + \\
+ \sup_{t\in[0,T]} |\varphi_n^f(t, \pi_n \varrho_{x^0} x^m) - \varphi_n^f(t, \pi_n x^0))| + \\
+ \sup_{t\in[0,T]} |\varphi_n^f(t, \pi_n x^0) - \varphi^f(t, x^0))|.
\end{aligned}$$

Згідно леми 2.2.4 спочатку виберемо N так, щоб для довільного $n \geq N$ перший і третій доданок був менше $\frac{\varepsilon}{3}$ для всіх m. Після чого візьмемо M так, щоб другий доданок при $n = N$ був менший $\frac{\varepsilon}{3}$ для будь-якого $m \geq M$. Звідси при $m \geq M$

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi^f(t, \varrho_{x^0} x^m) - \varphi^f(t, x^0)| < \varepsilon\,.$$

Далі запишемо

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi_n^f(t,\pi_n\varrho_{x^0}x^m) - \varphi^f(t,x^0)| \le$$
$$\le \sup_{t\in[0,T]} |\varphi_n^f(t,\pi_n\varrho_{x^0}x^m) - \varphi^f(t,\varrho_{x^0}x^m)| +$$
$$+ \sup_{t\in[0,T]} |\varphi^f(t,\varrho_{x^0}x^m) - \varphi^f(t,x^0)|.$$

Звідси зрозуміло, що при $n, m \to \infty$

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi_n^f(t,\pi_n\varrho_{x^0}x^m) - \varphi^f(t,x^0)| \to 0. \qquad (2.11)$$

З (2.11) випливає твердження наслідку. $\square$

Наслідок 2.2.2. *Функції φ_n^f, $n \in \mathbb{N}$, та φ^f неперервні по (t,x).*

Доведення. Неперервність φ_n^f, $n \in \mathbb{N}$, випливає з леми 1.3.2. Покажемо неперервність φ^f. Нехай $\{y^m\}_{m\ge1}$ — послідовність в $\mathcal{M}$ і $y^m \to x^0$ при $m \to \infty$. Виберемо p_1, для якого

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi_{p_1}^f(t,\pi_{p_1}y^1) - \varphi^f(t,y^1)| < \frac{1}{2}.$$

Це можна зробити згідно попередньої леми. Далі по індукції візьмемо для довільного $m \ge 2$ номер $p_m > p_{m-1}$ так, щоб

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi_{p_m}^f(t,\pi_{p_m}y^m) - \varphi^f(t,y^m)| < \frac{1}{2^m}.$$

Позначимо $x^{p_m} = \pi_{p_m}y^m$. Відмітимо, що $\varphi_{p_m}^f(\cdot,x^{p_m}) = \varphi_{p_m}^f(\cdot,\pi_{p_m}y^m)$, $m \ge 1$. Нехай $\varepsilon > 0$ і номер M вибраний так, що $\frac{1}{2^M} < \frac{\varepsilon}{2}$ та для будь-якого $m \ge M$

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi_{p_m}^f(t,x^{p_m}) - \varphi^f(t,x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Це можна зробити згідно наслідку 2.2.1. Для $m \ge M$ розглянемо

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi^f(t,y^m) - \varphi^f(t,x^0)| \le$$
$$\le \sup_{t\in[0,T]} |\varphi^f(t,y^m) - \varphi_{p_m}^f(t,\pi_{p_m}y^m)| +$$

$$+\sup_{t\in[0,T]}|\varphi^f_{p_m}(t,x^{p_m})-\varphi^f(t,x^0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

$\square$

Тепер ми можемо довести строгу марковську властивість процесу важких дифузійних частинок в $\mathcal{M}$.

Теорема 2.2.1. *Процес важких дифузійних частинок в $\mathcal{M}$ є строго марковським процесом.*

Доведення. Використаємо позначення із доведення леми 2.2.4. Нехай $\mathcal{F}^w_t=\sigma(w(s),\ s\le t)$ і τ — обмежений марковський момент. Тоді для $x^0\in\mathcal{M}$ і $f\in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^{2k+1})$

$$\mathbb{E}\left(f(\pi_k X_{t+\tau}(x^0))|\,\mathcal{F}^w_\tau\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(f(\pi_k X^n_{t+\tau}(\pi_n x^0))|\,\mathcal{F}^w_\tau\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\varphi^f_n(t,X^n_\tau(\pi_n x^0))=\varphi^f(t,X_\tau(x^0)).$$

Тут останній перехід вірний в силу наслідку 2.2.2. Отже, беручи умовне математичне сподівання по σ-алгебрі $\mathcal{F}^{X(x^0)}_\tau$ і по $\sigma(X_\tau(x^0))$ від першого та останнього елементу останньої рівності, маємо

$$\mathbb{E}\left(f(\pi_k X_{t+\tau}(x^0))|\,\mathcal{F}^{X(x^0)}_\tau\right)=\varphi^f(t,X_\tau(x^0))$$

та

$$\mathbb{E}\left(f(\pi_k X_t(x^0))|X_\tau(x^0)\right)=\varphi^f(t,X_\tau(x^0)).$$

Звідси

$$\mathbb{E}\left(f(\pi_k X_{t+\tau}(x^0))|\,\mathcal{F}^{X(x^0)}_\tau\right)=\mathbb{E}\left(f(\pi_k X_t(x^0))|X_\tau(x^0)\right).$$

$\square$

Позначимо для $t\ge 0$, $x\in\mathcal{M}$ та $\Delta\in\mathcal{B}(\mathcal{M})$

$$P_t(x,\Delta)=\mathbb{P}\{X_t(x)\in\Delta\}.$$

З доведення теореми видно, що $P_t(x,\Delta)$ є перехідною ймовірністю і

$$\mathbb{E}\left(f(\pi_k X_{t+\tau}(x^0))|\,\mathcal{F}^{X(x^0)}_\tau\right)=\int\limits_{\mathcal{M}} f(\pi_k y)P_t(X_\tau(x^0),dy).$$

2.3 Проблема мартингалів для нескінченної системи

Оскільки процес важких дифузійних частинок є строго марковським процесом у просторі $\mathcal{M}$, то у даному пункті ми опишемо цей процес у термінах проблеми мартингалів, зокрема знайдемо вигляд його генератора і визначимо множину, на якій потрібно задати генератор, щоб існував єдиний розв'язок проблеми мартингалів. Відмітимо, що у першому розділі при описі ядра генератора для системи важких дифузійних частинок в E^n ми вибирали функції так, щоб цей оператор переводив неперервні функції в неперервні і, крім того, був сильним генератором (породжувався напівгрупою). Тут ми працюватимемо лише з функціями на $\mathcal{M}$, які можна подати у вигляді $\widetilde{f} = f \circ \pi_k$, і за рахунок нескінченної кількості частинок нам не доводиться очікувати, що множиною значень генератора є неперервні функції. Візьмемо

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{M}} = \{ f \circ \pi_k \big|_{\mathcal{M}} : \ f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^{2k+1}), \ f \text{ має компактний носій}, \ k \in \mathbb{N} \}.$$

Множина $\mathfrak{D}_{\mathcal{M}}$ буде областю визначення нашого генератора.

Нехай $X.(x)$ — процес важких дифузійних частинок в $\mathcal{M}$, що стартував з x. Візьмемо функцію $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^{2k+1})$ і до $f(\pi_k X_t(x))$ застосуємо формулу Іто, отримаємо

$$f(\pi_k X_t(x)) - f(\pi_k x) - \frac{1}{2} \int\limits_0^t \sum_{i,j=-k}^{k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\pi_k X_s(x)) d\langle x_i(\cdot), x_j(\cdot) \rangle_s =$$
$$= \int\limits_0^t \sum_{i=-k}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\pi_k X_s(x)) dx_i(s) = m_f(t).$$

Використовуючи те, що система процесів $\{x_k(t), \ k \in \mathbb{Z}, \ t \geq 0\}$ задовольняє умови теореми 2.1.1, останню рівність можна переписати в наступному вигляді

$$f(\pi_k X_t(x)) - f(\pi_k x) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \sum_{i,j=-k}^{k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\pi_k X_s(x)) \frac{\mathbb{I}_{\{x_i(s)=x_j(s)\}}}{m_i(s)} ds =$$

$$= m_f(t). \quad (2.12)$$

Для $\widetilde{f} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{M}}$ візьмемо

$$\mathfrak{G}_{\mathcal{M}}\, \widetilde{f}(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=-k}^{k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\pi_k x) \frac{\mathbb{I}_{\{x_i=x_j\}}}{\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \mathbb{I}_{\{x_i=x_l\}}},$$

де $\widetilde{f} = f \circ \pi_k\big|_{\mathcal{M}}$. Має місце наступна теорема.

Теорема 2.3.1. *Процес важких дифузійних частинок є єдиним розв'язком* $(\mathfrak{G}_{\mathcal{M}}, \mathfrak{D}_{\mathcal{M}})$*-проблеми мартингалів.*

Доведення. Використовуючи рівність (2.12) і властивість 1°) теореми 2.1.1, отримаємо

$$f(\pi_k X_t(x)) - f(\pi_k x) - \int\limits_0^t \mathfrak{G}_{\mathcal{M}}\, f(\pi_k X_s(x)) ds - \text{мартингал}. \quad (2.13)$$

Покажемо, що довільний процес $\{Y_t(x),\ t \ge 0\}$ такий, що $Y_0(x) = x$ і задовольняє (2.13), є процесом важких дифузійних частинок. Візьмемо для $i = -k, \ldots, k$ та $r > 0$ функцію $f_i^r \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^{2k+1})$ таку, що $f_i^r(\pi_k x) = x_i$ при $\pi_k x \in (-r, r)^{2k+1}$ і $f_i^r(\pi_k x) = 0$ при $\pi_k x \notin (-r-1, r+1)^{2k+1}$. Позначимо

$$\sigma^r = \inf\{t:\ \pi_k Y_t(x) \notin (-r, r)^{2k+1}\}.$$

За теоремою 3.1.5 [22, ст. 54] σ^r — марковський момент відносно $\mathcal{F}^{Y(x)} = \sigma(Y_s(x),\ s \le t)$. Розглянемо

$$m^{f_i^r}(t \wedge \sigma^r) = f_i^r(\pi_k Y_{t\wedge\sigma^r}(x)) - f(\pi_k x) -$$

$$- \int\limits_0^{t\wedge\sigma^r} \mathfrak{G}_{\mathcal{M}}\, f_i^r(\pi_k Y_s(x)) ds = y_i(t \wedge \sigma^r) - x_i.$$

За теоремою про перетворення вільного вибору [18, ст. 42] процес $y_i(t \wedge \sigma^r) - x_i$ — неперервний мартингал. В силу довільності r $y_i(\cdot)$ задовольняє умову 1°).

Далі, нехай $f_i^r \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^{2k+1})$ і $f_i^r(\pi_k x) = x_i^2$ при $\pi_k x \in (-r, r)^{2k+1}$ і $f_i^r(\pi_k x) = 0$ при $\pi_k x \notin (-r-1, r+1)^{2k+1}$, тоді

$$m^{f_i^r}(t \wedge \sigma^r) = y_i^2(t \wedge \sigma^r) - x_i^2 - \int\limits_0^{t\wedge\sigma^r} \frac{ds}{m_i(s)} - \text{мартингал.}$$

Звідси

$$\langle y_i(\cdot)\rangle_t = \int\limits_0^t \frac{ds}{m_i(s)}.$$

Отже, $y_i(\cdot)$ також задовольняє умову 4°).

Перевіримо виконання 5°). Нехай для $i \neq j$ $f_{i,j}^r \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^{2k+1})$ і $f_{i,j}^r(\pi_k x) = x_i x_j$ при $\pi_k x \in (-r, r)^{2k+1}$, і $f_{i,j}^r(\pi_k x) = 0$ при $\pi_k x \notin (-r-1, r+1)^{2k+1}$, тоді

$$m^{f_{i,j}^r}(t \wedge \sigma^r) = y_i(t \wedge \sigma^r) y_j(t \wedge \sigma^r) - x_i x_j - \\ - \int\limits_0^{t\wedge\sigma^r} \frac{\mathbb{I}_{\{y_i(s)=y_j(s)\}}}{m_i(s)} ds \; - \; \text{мартингал.}$$

Звідси

$$\langle y_i(\cdot), y_j(\cdot)\rangle_t \, \mathbb{I}_{\{t<\tau_{i,j}\}} = 0.$$

Оскільки виконання умов 2°) і 3°) очевидне, то $Y_\cdot(x)$ — процес важких дифузійних частинок в $\mathcal{M}$. □

2.4 Стаціонарна дискретна міра як початкова умова

У даному пункті мова йтиме про систему важких дифузійних частинок, яка побудована в першому пункті. Ми будемо вивчати існування такої системи для випадку, коли старт є випадковим і задовольняє деякій умові стаціонарності, яку опишемо пізніше. Вивчення цього випадку зв'язане з тим, що ми хочемо побудувати математичну модель системи частинок зі склеюванням зі змінною масою, які б стартували з усіх точок прямої, тобто, щоб розподілом їхньої маси при старті була міра Лебеґа. А це означає, що в початковий момент частинки повинні починати рух з нескінченно малою масою, а отже, з нескінченно великою дифузією. Для розв'язання останньої проблеми ми пропонуємо відступити на як завгодно малий проміжок часу t_0 і припустити, що для довільного відрізку всі частинки, які з нього стартували, склеїлись в скінченну кількість. А потім будувати сукупність процесів, що описує дану модель на $[t_0, +\infty)$. Природньо вважати, що у цьому випадку стартом має бути випадкова точкова міра, яка не міняє своїх ймовірносних характеристик при зсуві, тобто у якої ймовірносний розподіл стаціонарний. Отже, даний пункт є першим кроком до розв'язання проблеми існування системи частинок зі склеюванням зі змінною масою, які б стартували з усіх точок прямої.

Почнемо з дослідження деяких властивостей стаціонарних мір. Детальний опис цього об'єкту можна знайти, наприклад, у [28].

Означення 2.4.1. *Точковою мірою на* $\mathbb{R}$ *називатимемо міру* $\mu = \sum\limits_{k\in I} a_k\delta_{x_k}$*, де* $a_k > 0$*,* $x_k \in \mathbb{R}$*,* $x_l \neq x_k$ *при* $l \neq k$ *і* $I \subseteq \mathbb{Z}$*.*

Поряд з μ будемо розглядати міру $\mu^* = \sum\limits_{k\in I} \delta_{x_k}$.

Нехай $\mathfrak{N}$ — множина точкових мір μ на $\mathbb{R}$ таких, що $\mu^*(B) < \infty$ для довільної обмеженої множини $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Означення 2.4.2. *Стаціонарною точковою мірою* μ *на* $\mathbb{R}$ *називатимемо відображення*

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \Omega \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\},$$

яке має наступні властивості:

1) *для будь-якого* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mu(B, \cdot)$ *— випадкова величина;*

2) $\mu(\cdot,\omega) \in \mathbb{N},\ \forall\ \omega \in \Omega$;

3) *для будь-яких* $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *і* $h \in \mathbb{R}$

$$(\mu(B_1), \ldots, \mu(B_n)) \stackrel{d}{=} (\mu(B_1 + h), \ldots, \mu(B_n + h)).$$

Надалі розглядатимемо $\mathfrak{N}$ як вимірний простір з найменшою σ-алгеброю $\mathcal{N}$, відносно якої вимірні всі відображення $\mu \to \mu(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ і B — обмежена.

Зауваження 2.4.1. *μ — стаціонарна точкова міра тоді і тільки тоді, коли μ — випадковий елемент в $\mathfrak{N}$, який задовольняє властивість* 3) *означення 2.4.2.*

Зауваження 2.4.2. *В означенні 2.4.2 умова* 3) *еквівалентна умові*

3′) *для довільних неперетинних напіввідкритих інтервалів* $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *і для довільного* $h \in \mathbb{R}$

$$(\mu(B_1), \ldots, \mu(B_n)) \stackrel{d}{=} (\mu(B_1 + h), \ldots, \mu(B_n + h)).$$

Наведемо приклади стаціонарних мір.

Приклад 2.4.1. *Нехай $\{x(u,\cdot),\ u \in \mathbb{R}\}$ — потік Арратья [1]. Візьмемо $\mu_t(B) = \lambda(B_t)$, де $B_t = \{u:\ x(u,t) \in B\}$ і λ — міра Лебеґа на $\mathbb{R}$. Тоді для довільного $t \geq 0$ μ_t — стаціонарна точкова міра.*

Доведення того, що μ_t задовольняє умови 1)–2) *означення 2.4.2 можна знайти, наприклад, в [9]. Перевіримо виконання умови* 3)*. Нехай $\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$ — потік Арратья. Тоді для довільного h $\{y(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$ також потік Арратья, де $y(u,t) = x(u-h,t) + h$. Візьмемо $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ і розглянемо*

$$\begin{aligned}
&(\mu_t(B_1), \ldots, \mu_t(B_n)) = \\
&= (\lambda\{u:\ x(u,t) \in B_1\}, \ldots, \lambda\{u:\ x(u,t) \in B_n\}) = \\
&= (\lambda\{u:\ x(u,t) + h \in B_1 + h\}, \ldots, \lambda\{u:\ x(u,t) + h \in B_n + h\}) = \\
&= (\lambda\{u:\ y(u+h,t) \in B_1 + h\}, \ldots, \lambda\{u:\ y(u+h,t) \in B_n + h\}) = \\
&= (\lambda\{u-h:\ y(u,t) \in B_1 + h\}, \ldots, \lambda\{u-h:\ y(u,t) \in B_n + h\}) = \\
&= (\lambda\{u:\ y(u,t) \in B_1 + h\}, \ldots, \lambda\{u:\ y(u,t) \in B_n + h\}) \stackrel{d}{=} \\
&\stackrel{d}{=} (\mu_t(B_1 + h), \ldots, \mu_t(B_n + h)).
\end{aligned}$$

Приклад 2.4.2. *Нехай μ — міра, яка задовольняє наступні умови:*

1) *$\mu(B)$ — пуассонівська випадкова величина з інтенсивністю $\lambda(B)$;*
2) *випадкові величини $\mu(B_1), \ldots, \mu(B_n)$ незалежні в сукупності для довільної неперетинної системи множин $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Тоді μ — стаціонарна точкова міра (міра μ називаєтьcя Пуассонівською випадковою мірою і її існування встановлено, наприклад, в [29]).

Далі доведемо лему, з якої потім буде випливати існування сукупності частинок зі склеюванням зі змінною масою, розподілом маси у початковий момент яких є стаціонарна міра.

Лема 2.4.1. *Нехай $\mu = \sum\limits_{k \in I} a_k \delta_{x_k}$ — стаціонарна точкова міра така, що $\mu \neq 0$ м.н., для довільних $l, k \in I$ з того, що $l < k$ і $l \leq i \leq k$, випливає $x_l < x_k$ та $i \in I$. Тоді з ймовірністю 1 $I = \mathbb{Z}$ і послідовності $\{x_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ та $\{a_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ задовольняють умови $1^\star$), $2^\star$) теореми 2.1.1.*

Доведення. Нехай

$$C_n^{(m)} = [mn, m(n+1)).$$

Розглянемо

$$X_N^{(m)}(n) = \mu(C_n^{(m)}) \prod_{k: x_k \in C_n^{(m)}} \mathbb{I}_{\left\{a_k \geq \frac{1}{N}\right\}} \mathbb{I}_{\{\mu^*(C_n^{(m)}) > 1\}}.$$

$X_N^{(m)}(n)$ можна подати у вигляді

$$X_N^{(m)}(n) = \lim_{k \to \infty} \mathbb{I}_{\left\{\sum\limits_{G \in \mathcal{A}_k(C_n^{(m)})} \mathbb{I}_{\{\mu(G) > 0\}} > 1\right\}} \times$$
$$\times \left(\sum_{G \in \mathcal{A}_k(C_n^{(m)})} \mu(G) \right) \prod_{G \in \mathcal{A}_k(C_n^{(m)})} \left(\mathbb{I}_{\left\{\mu(G) \geq \frac{1}{N}\right\}} + \mathbb{I}_{\{\mu(G) = 0\}} \right),$$

де $\mathcal{A}_k([a,b))$ – скінченне вкладене розбиття $[a,b)$ відкритими справа півінтервалами таке, що

$$\max_{A\in\mathcal{A}_k([a,b))} \operatorname{diam} A \to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Звідси легко бачити, що $X_N^{(m)}$ — стаціонарний процес у вузькому розумінні. З $X_N^{(m)}$ утворимо новий стаціонарний процес

$$Y_N^{(m)}(n) = X_N^{(m)}(n)\,\mathbb{I}_{\{X_N^{(m)}\le N\}}\,.$$

Далі, оскільки $\mathbb{E}\,Y_N^{(m)}(n) < \infty$, то за теоремою Біркгофа-Хінчіна [30, ст. 274]

$$\lim_{K-M\to\infty}\frac{1}{K-M}\sum_{n=M+1}^{K} Y_N^{(m)}(n) = \mathbb{E}(Y_N^{(m)}(n)|\mathcal{S}_{Y_N^{(m)}}),$$

де

$$\mathcal{S}_{Y_N^{(m)}} = (Y_N^{(m)})^{-1}(\mathcal{S}), \quad \mathcal{S}=\{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty):\ T^{-1}(B)=B\}$$

і T — оператор зсуву в $\mathbb{R}^\infty$.

Позначимо $\xi_N^{(m)} = \mathbb{E}(Y_N^{(m)}(n)|\mathcal{S}_{Y_N^{(m)}})$ і розглянемо $B_N^{(m)} = \{\xi_N^{(m)} = 0\}$ та $A_N^{(m)} = \Omega\backslash B_N^{(m)}$. Оскільки на $A_N^{(m)}$ існує послідовність цілих чисел $\{n_j,\ j\in\mathbb{Z}\}$ така, що $N\ge Y_N^{(m)}(n_j)\ge \frac{1}{N}$, то з конструкції $Y_N^{(m)}$ видно, що умови $1^\star$), $2^\star$) теореми 2.1.1 на $A_N^{(m)}$ виконуються.

Покажемо, що

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{m,N=1}^{\infty} A_N^{(m)}\right\} = 1,$$

а це рівносильно тому, що

$$\mathbb{P}\left\{\bigcap_{m,N=1}^{\infty} B_N^{(m)}\right\} = 0.$$

Нехай це не так. Розглянемо

$$\int\limits_{B_N^{(m)}} Y_N^{(m)}(n)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_{B_N^{(m)}} \xi_N^{(m)}(n)\,\mathbb{P}(d\omega) = 0.$$

Звідси $Y_N^{(m)}(n) = 0$ на $B_N^{(m)}$. Отже, $Y_N^{(m)}(n) = 0$ для довільних $n,\ m$ і N на $\bigcap\limits_{m,N=1}^{\infty} B_N^{(m)}$. А це означає, що або на $\mathbb{R}^+$, або на $\mathbb{R}^-$ є рівно одна точка, у якій зосереджена міра μ (на $\bigcap\limits_{m,N=1}^{\infty} B_N^{(m)}$).

Візьмемо

$$Y(n) = \mu^*([n, n+1)), \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Згідно із зауваженням, наведеним вище, знайдеться $\alpha > 0$ і $n \in \mathbb{Z}$ такі, що

$$\alpha = \mathbb{P}\{Y(n) = 1, Y(m) = 0, \quad n \neq m\}.$$

Оскільки μ — стаціонарна міра, то μ^* також стаціонарна, а значить Y — стаціонарний процес у вузькому розумінні. Звідси

$$\begin{aligned}
\alpha = \mathbb{P}\{Y(n) = 1, Y(m) = 0, \quad n \neq m\} = \\
= \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\{Y(-m) = 0, \ldots, Y(n) = 1, \ldots, Y(m) = 0\} = \\
= \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\{Y(-m+1) = 0, \ldots, Y(n+1) = 1, \ldots, Y(m+1) = 0\} = \\
= \mathbb{P}\{Y(n+1) = 1, Y(m+1) = 0, \quad n \neq m\},
\end{aligned}$$

що неможливо. Отримали суперечність з припущенням. □

Тепер доведемо основну теорему цього пункту.

Теорема 2.4.1. *Нехай $\mu = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta_{x_k}$ — стаціонарна точкова міра на $\mathbb{R}$ зі скінченною кількістю атомів на кожному відрізку і $\mu \neq 0$. Тоді існує система процесів $\{x_k(t),\ k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$, яка задовольняє наступні умови:*

1°) *для довільного $k \in \mathbb{Z}$ процес $x_k(\cdot) - x_k$ — неперервний квадратично інтегровний локальний мартингал відносно потоку σ-алгебр*

$$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} = (\sigma(x_k(s),\ s \leq t,\ k \in \mathbb{Z}))_{t\geq 0}\,;$$

2°) *$x_k(0) = x_k,\ k \in \mathbb{Z}$;*

3°) *для довільних $l < k$ та довільного $t \geq 0$ виконується нерівність $x_l(t) \leq x_k(t)$;*

4°) *для довільного $t \geq 0$ квадратична характеристика*

$$\langle x_k(\cdot) - x_k \rangle_t = \int\limits_0^t \frac{ds}{m_k(s)},$$

де

$$m_k(t) = \sum_{i \in M_k(t)} a_i,$$

$$M_k(t) = \{i \in \mathbb{Z}: \ \exists\, s \leq t, \ x_k(s) = x_i(s)\};$$

5°) *сумісна характеристика*

$$\langle x_l(\cdot) - x_l, x_k(\cdot) - x_k \rangle_t \, \mathbb{I}_{\{t < \tau_{l,k}\}} = 0,$$

де $\tau_{l,k} = \inf\{t: \ x_l(t) = x_k(t)\}$.

Зауваження 2.4.3. *У даній теоремі слово "мартингал" замінене на "локальний мартингал" лише по тій причині, що x_k, $k \in \mathbb{Z}$ може не мати першого моменту.*

Доведення. Нехай μ — стаціонарна точкова міра, задана на ймовірносному просторі $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$. Візьмемо на деякому іншому ймовірносному просторі $(\Omega'', \mathcal{F}'', \mathbb{P}'')$ зліченну сукупність незалежних стандартних вінерівських процесів $\{w_k, \ k \in \mathbb{Z}\}$. Майже для всіх $\omega' \in \Omega'$ за лемою 2.4.1 елементи $((a_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (x_k)_{k \in \mathbb{Z}})$ лежать в $\mathcal{K}$. Візьмемо

$$(x_k(\cdot))_{k \in \mathbb{Z}} = X.(a(\omega'), (x_k(\omega'))_{k \in \mathbb{Z}}, (\omega', \omega''))$$

(тут X визначено формулою (2.3)). Покажемо, що система $\{x_k(\cdot), \ k \in \mathbb{Z}\}$ є шуканою.

З твердження 2.1.1 випливає, що $x_k(\cdot)$ — випадковий процес для довільного $k \in \mathbb{Z}$. Перевіримо, що $x_k(\cdot) - x_k$ квадратично інтегровний локальний мартингал.

Нехай

$$\sigma_n^{(k)} = \inf\{t: \ |x_k(t) - x_k| \geq n\} \wedge n.$$

Оскільки $x_k(\cdot) - x_k$ — неперервний процес, узгоджений з $(\mathcal{F}_t^{\mu,w})_{t \geq 0} = (\sigma(a_k, x_k, w_k(s), \ s \leq t, \ k \in \mathbb{Z}))_{t \geq 0}$, то $\sigma_n^{(k)}$ — марковський момент відносно $(\mathcal{F}_t^{\mu,w})_{t\ge 0}$. За теоремою про перетворення вільного вибору [18, ст. 42] для довільного $\omega' \in \Omega'$ процес $x_k(\cdot \wedge \sigma_n^{(k)}, \omega') - x_k(\omega')$ — квадратично інтегровний мартингал з характеристикою

$$\langle x_k(\cdot, \omega') - x_k(\omega') \rangle_t = \int\limits_0^{t\wedge\sigma_n^{(k)}(\omega')} \frac{ds}{m_k(s, \omega')}.$$

Покажемо, що $x_k(\cdot \wedge \sigma_n^{(k)})$ — квадратично інтегровний мартингал на $\Omega' \times \Omega''$. Для цього достатньо перевірити, що

$$\int\limits_{A'\times A''} (x_k(t\wedge\sigma_n^{(k)}) - x_k) d\,\mathbb{P}' \otimes \mathbb{P}'' = \int\limits_{A'\times A''} (x_k(s\wedge\sigma_n^{(k)}) - x_k) d\,\mathbb{P}' \otimes \mathbb{P}'',$$

де $s \le t,\ A' \in \sigma(a_k, x_k,\ k \in \mathbb{Z})$ і $A'' \in \sigma(w_k(r),\ r \le s,\ k \in \mathbb{Z})$.

Отже,

$$\int\limits_{A'\times A''} (x_k(t\wedge\sigma_n^{(k)}) - x_k) d\,\mathbb{P}' \otimes \mathbb{P}'' = \int\limits_{A'} d\,\mathbb{P}' \int\limits_{A''} (x_k(t\wedge\sigma_n^{(k)}) - x_k) d\,\mathbb{P}'' =$$
$$= \int\limits_{A'} d\,\mathbb{P}' \int\limits_{A''} (x_k(s\wedge\sigma_n^{(k)}) - x_k) d\,\mathbb{P}'' = \int\limits_{A'\times A''} (x_k(s\wedge\sigma_n^{(k)}) - x_k) d\,\mathbb{P}' \otimes \mathbb{P}''.$$

Далі розглянемо

$$M_n(t) = (x_k(t\wedge\sigma_n^{(k)}) - x_k)^2 - \int\limits_0^{t\wedge\sigma_n^{(k)}} \frac{ds}{m_k(s)}.$$

Проводячи аналогічні міркування для M_n, маємо, що M_n — квадратично інтегровний мартингал. Звідси в силу теореми Дуба-Мейєра [23, ст. 73]

$$\langle x_k(\cdot) - x_k \rangle_t = \int\limits_0^{t\wedge\sigma_n^{(k)}} \frac{ds}{m_k(s)}.$$

Залишилось показати, що

$$\langle x_l(\cdot) - x_l, x_k(\cdot) - x_k \rangle_t \, \mathbb{I}_{\{t<\tau_{l,k}\}} = 0.$$

Позначимо
$$\tau_n = \tau_{l,k} \wedge \sigma_n^{(l)} \wedge \sigma_n^{(k)}.$$
Візьмемо
$$M_n^{l,k}(t) = (x_l(t \wedge \tau_n) - x_l)(x_k(t \wedge \tau_n) - x_k).$$
Легко бачити, що $M_n^{l,k}$ – квадратично інтегровний мартингал. За теоремою Дуба-Мейєра
$$(x_l(t \wedge \sigma_n^{(l)} \wedge \sigma_n^{(k)}) - x_l)(x_k(t \wedge \sigma_n^{(l)} \wedge \sigma_n^{(k)}) - x_k) = \widetilde{M}_n^{l,k}(t) + \\ + \langle x_l(\cdot \wedge \sigma_n^{(l)} \wedge \sigma_n^{(k)}) - x_l, x_k(\cdot \wedge \sigma_n^{(l)} \wedge \sigma_n^{(k)}) - x_k \rangle_t,$$
де $\widetilde{M}_n^{l,k}$ — мартингал. Підставимо в останню рівність замість t $t \wedge \tau_{l,k}$
$$(x_l(t \wedge \tau_n) - x_l)(x_k(t \wedge \tau_n) - x_k) = \widetilde{M}_n^{l,k}(t \wedge \tau_n) + \\ + \langle x_l(\cdot \wedge \sigma_n^{(l)} \wedge \sigma_n^{(k)}) - x_l, x_k(\cdot \wedge \sigma_n^{(l)} \wedge \sigma_n^{(k)}) - x_k \rangle_{t \wedge \tau_n}.$$
За теоремою про перетворення вільного вибору $\widetilde{M}_n^{l,k}(\cdot \wedge \tau_n)$ — мартингал, а отже, $M_n^{l,k} = \widetilde{M}_n^{l,k}(\cdot \wedge \tau_n)$. Звідси
$$\langle x_l(\cdot \wedge \sigma_n^{(l)} \wedge \sigma_n^{(k)}) - x_l, x_k(\cdot \wedge \sigma_n^{(l)} \wedge \sigma_n^{(k)}) - x_k \rangle_{t \wedge \tau_n} = 0.$$
Отримали
$$\langle x_l(\cdot) - x_l, x_k(\cdot) - x_k \rangle_{t \wedge \tau_n} = 0.$$
□

Зауваження 2.4.4. *В силу другої частини теореми 2.1.1 розподіл побудованої сукупності процесів* $(\ldots, x_{-n}(\cdot), \ldots, x_n(\cdot), \ldots)$ *не залежить від вибору системи вінерівських процесів* $\{w_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Наступна теорема показує, що розподіл $(\ldots, x_{-n}(\cdot), \ldots, x_n(\cdot), \ldots)$ залежить лише від розподілу $\mu_0 = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{x_k(0)}$ у просторі $\mathfrak{N}$. Нехай системи процесів $\{x_k(t),\ k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$ та $\{y_k(t),\ k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$ побудовані аналогічно, як у доведенні теореми 2.4.1.

Твердження 2.4.1. *Якщо розподіли стаціонарних точкових мір* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta_{x_k(0)}$ *та* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\delta_{y_k(0)}$ *співпадають у просторі* $\mathfrak{N}$, *то розподіли випадкових процесів* $\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta_{x_k(t)},\ t\geq 0\right\}$ *та* $\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\delta_{y_k(t)},\ t\geq 0\right\}$ *співпадають у просторі* $\mathfrak{N}^{\mathbb{R}^+}$.

Доведення. Позначимо

$$\mu_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta_{x_k(t)}, \quad t\geq 0,$$
$$\nu_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\delta_{y_k(t)}, \quad t\geq 0.$$

Для доведення твердження достатньо показати, що для довільних $t_1,\ldots,t_n\in\mathbb{R}^+$ та $B_1,\ldots,B_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}$,

$$(\mu_{t_1}(B_1),\ldots,\mu_{t_n}(B_n)) \stackrel{d}{=} (\nu_{t_1}(B_1),\ldots,\nu_{t_n}(B_n)).$$

Розглянемо відображення із $\mathcal{K}$ в $\mathfrak{N}$

$$\Lambda((a_k)_{k\in\mathbb{Z}},(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta_{x_k}.$$

Очевидно, що Λ — вимірне. Нехай

$$P_{(a,x)}^{t_1,\ldots,t_n;B_1,\ldots,B_n} = \mathrm{Law}\{\Lambda(a,X_{t_1}(a,x))(B_1),\ldots,\Lambda(a,X_{t_n}(a,x))(B_n)\},$$

де $(a,x)\in\mathcal{K}$ і X визначено формулою (2.3). В силу твердження 2.1.1 для довільних $C_1,\ldots,C_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ відображення

$$(a,x)\to P_{(a,x)}^{t_1,\ldots,t_n;B_1,\ldots,B_n}(C_1,\ldots,C_n)$$

є вимірним із простору $\mathcal{K}$ у простір $\mathbb{R}^n$. Відмітимо, що для будь-якого $l\in\mathbb{Z}$ та $(a,x)=((a_k)_{k\in\mathbb{Z}},(x_k)_{k\in\mathbb{Z}})\in\mathcal{K}$

$$P_{(a,x)}^{t_1,\ldots,t_n;B_1,\ldots,B_n} = P_{(a^l,x^l)}^{t_1,\ldots,t_n;B_1,\ldots,B_n},$$

де $(a^l,x^l) = ((a_{k+l})_{k\in\mathbb{Z}},(x_{k+l})_{k\in\mathbb{Z}})$. Використовуючи останню рівність, можемо коректно визначити для довільного $\mu\in\mathfrak{N}$

$$P_{\mu}^{t_1,\ldots,t_n;B_1,\ldots,B_n} = P_{(a,x)}^{t_1,\ldots,t_n;B_1,\ldots,B_n},$$

де $\mu = \Lambda(a, x)$. Позначимо

$$Q^{\mu_0} = \mathrm{Law}\{\mu_0\},$$
$$Q^{\nu_0} = \mathrm{Law}\{\nu_0\}.$$

З конструкції процесів $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$ та $\{\nu_t,\ t \geq 0\}$ маємо

$$\mathrm{Law}\{(\mu_{t_1}(B_1), \ldots, \mu_{t_n}(B_n))\} = \int\limits_{\mathfrak{N}} P_{\mu}^{t_1,\ldots,t_n;B_1,\ldots,B_n} Q^{\mu_0}(d\mu) =$$
$$= \int\limits_{\mathfrak{N}} P_{\mu}^{t_1,\ldots,t_n;B_1,\ldots,B_n} Q^{\nu_0}(d\mu) = \mathrm{Law}\{(\nu_{t_1}(B_1), \ldots, \nu_{t_n}(B_n))\}.$$

$\square$

Нехай $\{x_k(t),\ k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$ — система процесів, побудована в теоремі 2.4.1.

Наслідок 2.4.1. *Для довільного* $t \geq 0$ *міра* $\mu_t = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_{x_k(t)}$ *– стаціонарна.*

Твердження наслідку показує, що ймовірносний розподіл міри μ_t не залежить від зсуву на довільне число $h \in \mathbb{R}$, тобто $\mu_t \overset{d}{=} \mu_t(\cdot + h)$.

2.5 Асимптотичні властивості нескінченної системи

У даному пункті вивчимо деякі властивості процесу важких дифузійних частинок в $\mathcal{M}$, зокрема нами буде досліджена асимптотична поведінка на нескінченності процесів, які описують рух окремих частинок, у випадку, коли стартом є цілі точки. Однак точні асимптотики нам поки-що не відомі. Також буде знайдена оцінка на асимптотику росту маси частинки і доведено, що довільні дві частинки склеяться з ймовірністю 1.

Нехай $\{(x_k(t))_{k \in \mathbb{Z}},\ t \geq 0\}$ — процес важких дифузійних частинок в $\mathcal{M}$. Перейдемо до формулювання і доведення властивостей.

Лема 2.5.1. *Існує система стандартних вінерівських процесів* $\{w_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *така, що*

$$x_k(t) = x_k + \int\limits_0^t \frac{dw_k(s)}{\sqrt{m_k(s)}}, \quad k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0,$$

та

$$\langle w_l, w_k \rangle_t \ \mathbb{I}_{\{t<\tau_{l,k}\}} = 0.$$

Нехай $w,\ w_1$ та w_2 — незалежні стандартні вінерівські процеси. Позначимо для $s \in \mathbb{R}$

$$\sigma_s = \inf\{t:\ w_1(t) - w_2(t) = s\}. \tag{2.14}$$

Лема 2.5.2. *Для довільних* $k, l \in \mathbb{Z},\ t \geq 0,\ a > 0$ *виконується*

$$\mathbb{P}\{\tau_{k,l} \leq t\} \leq \mathbb{P}\{\sigma_{x_l - x_k} \leq t\},$$

$$\mathbb{P}\left\{\min_{t\in[0,T]} x_k(t) \leq x_k(0) - a\right\} \leq \mathbb{P}\left\{\min_{t\in[0,T]} w(t) \leq -a\right\}$$

та

$$\mathbb{P}\left\{\max_{t\in[0,T]} x_k(t) \geq x_k(0) + a\right\} \leq \mathbb{P}\left\{\max_{t\in[0,T]} w(t) \geq a\right\}.$$

Доведення. Доведемо тільки першу нерівність, дві інші перевіряються аналогічно. Із леми 2.5.1

$$x_i(t) = x_i + \int\limits_0^t \frac{dw_i(s)}{\sqrt{m_i(s)}}, \quad i = k, l,\ t \geq 0.$$

Побудуємо незалежні вінерівські процеси $\widetilde{w}_k,\ \widetilde{w}_l$ так, щоб

$$(\widetilde{w}_i(t) - w_i(t)) \ \mathbb{I}_{\{t<\tau_{k,l}\}} = 0, \quad i = k, l,\ t \geq 0.$$

Визначимо

$$x(t) = \int\limits_0^t \frac{d\widetilde{w}_k(s)}{\sqrt{m_k(s)}} - \int\limits_0^t \frac{d\widetilde{w}_l(s)}{\sqrt{m_l(s)}}.$$

Очевидно, що

$$\tau_{k,l} = \inf\{t:\ x(t) = x_l - x_k\}.$$

Легко бачити, що $x(\cdot)$ — квадратично інтегровний мартингал і

$$\langle x(\cdot)\rangle_t = \int\limits_0^t \left(\frac{1}{m_k(s)} + \frac{1}{m_l(s)}\right) ds.$$

Оскільки $\frac{1}{m_i(s)} \le 1, \quad i = k, l$, то $\langle x(\cdot)\rangle_t \le 2\,t$ В силу теореми представлення (див. [18, ст. 99]), існує вінерівський процес $\widehat{w}$, такий, що

$$x(t) = \widehat{w}(\langle x(\cdot)\rangle_t).$$

Нехай

$$\widetilde{\sigma}_{x_l - x_k} = \inf\{t : \ \widehat{w}(2\,t) = x_l - x_k\},$$

тоді

$$x_l - x_k = x(\tau_{k,l}) = \widehat{w}(\langle x(\cdot)\rangle_{\tau_{k,l}}) = \widehat{w}(2\,\widetilde{\sigma}_{x_l - x_k}).$$

В силу монотонності $\langle x(\cdot)\rangle$

$$2\,\widetilde{\sigma}_{x_l - x_k} = \langle x(\cdot)\rangle_{\tau_{k,l}} \le 2\,\tau_{k,l}$$

або

$$\sigma_{x_l - x_k} \overset{d}{=} \widetilde{\sigma}_{x_l - x_k} \le \tau_{k,l}.$$

Звідси

$$\mathbb{P}\{\tau_{k,l} \le t\} \le \mathbb{P}\{\widetilde{\sigma}_{x_l - x_k} \le t\} = \mathbb{P}\{\sigma_{x_l - x_k} \le t\}.$$

□

Надалі вважаємо, що частинки стартують з цілих точок прямої, тобто для будь-яких $k \in \mathbb{Z} \ \ x_k = k$.

Лема 2.5.3. *Для довільного цілого* k

$$\mathbb{P}\left\{\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{m_k(t)}{4\sqrt{t\,\ln\ln t}} \le 1\right\} = 1. \tag{2.15}$$

Доведення. Рівність (2.15) еквівалентна

$$\mathbb{P}\{\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\, n_1(\varepsilon)\ \forall n \ge \ n_1(\varepsilon) \quad m_k(n) \le (1+\varepsilon)\varphi(n)\} = 1,$$

де

$$\varphi(t) = 4\sqrt{t\,\ln\ln t}.$$

Нехай $\varepsilon > 0$, $\lambda = 1+\varepsilon$, $n_k = \lambda^k$, де $k \geq k_0$, а k_0 вибирається так, щоб вираз $\ln\ln k_0$ був визначений. Позначимо також

$$A_p = \{m_k(n) > \lambda\varphi(n) \text{ для деякого } n \in (n_p, n_{p+1}]\}\,.$$

Оцінимо

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{A_p\} \leq \mathbb{P}\{m_k(n) > \lambda\varphi(n_p) \text{ для деякого } n \in (n_p, n_{p+1}]\} \leq \\ \leq \mathbb{P}\{m_k(n) > \lambda\varphi(n_p) \text{ для деякого } n \leq n_{p+1}\} \leq \\ \leq \mathbb{P}\{m_k(n_{p+1}) > \lambda\varphi(n_p)\}.\end{aligned}$$

Розглянемо при $t > 0$ і $l > 2$

$$\mathbb{P}\{m_k(t) > l\} \leq \mathbb{P}\left\{\tau_{k,k+\left[\frac{l}{2}\right]} \leq t\right\} + \mathbb{P}\left\{\tau_{k,k-\left[\frac{l}{2}\right]} \leq t\right\} \leq 2\,\mathbb{P}\left\{\sigma_{\left[\frac{l}{2}\right]} \leq t\right\},$$

де σ_s визначене формулою (2.14).

Використовуючи асимптотику хвоста функції розподілу стандартного нормального закону (див. [26, ст. 386]), маємо

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{A_p\} \leq \frac{4}{\sqrt{2\,\pi}} \int\limits_{\left[\frac{\lambda\varphi(n_p)}{2\sqrt{2\,n_{p+1}}}\right]}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \leq \frac{4}{\sqrt{2\,\pi}} \int\limits_{\frac{\lambda\varphi(n_p)}{2\sqrt{2\,n_{p+1}}}-1}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \sim \\ \sim \frac{4}{\sqrt{2\,\pi}} \left(\frac{\lambda\varphi(n_p)}{2\sqrt{2\,n_{p+1}}} - 1\right)^{-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda\varphi(n_p)}{2\sqrt{2\,n_{p+1}}}-1\right)^2} \leq \\ \leq C_1 e^{-\lambda\ln\ln\lambda^p + \sqrt{2\lambda\ln\ln\lambda^p}} = \\ = C_1 e^{-(1-\varepsilon_1)\lambda\ln\ln\lambda^p} e^{-\varepsilon_1\,\lambda\ln\ln\lambda^p + \sqrt{2\lambda\ln\ln\lambda^p}} \leq \\ \leq C_2 e^{-(1-\varepsilon_1)\lambda\ln p} = C_2 \frac{1}{p^{\lambda(1-\varepsilon_1)}},\end{aligned}$$

де $\varepsilon_1 > 0$ вибираємо так, щоб $(1-\varepsilon_1)\lambda > 1$.

Оскільки $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{\lambda(1-\varepsilon_1)}} < +\infty$, то в силу леми Бореля-Кантеллі отримаємо, що

$$\mathbb{P}\{\overline{\lim_{p\to+\infty}} A_p\} = 0.$$

□

Лема 2.5.4. *Для довільного* $k \in \mathbb{Z}$ *і* $p \in \mathbb{N}$ *процеси* $x_k(\cdot)$ *і* $x_{k+p}(\cdot)$ *склеюються за скінченний час, тобто*

$$\mathbb{P}\{\tau_{k,k+p} < +\infty\} = 1.$$

Доведення. Як і в доведенні леми 2.5.3, побудуємо такий процес $x(\cdot)$, що

$$\tau_{k,k+p} = \inf\{t: \ x(t) = p\}$$

і

$$\langle x(\cdot)\rangle_t = \int_0^t \left(\frac{1}{m_k(s)} + \frac{1}{m_{k+p}(s)}\right) ds.$$

Використовуючи лему 2.5.3, отримаємо

$$\int_0^t \frac{1}{m_k(s)}\, ds \geq \sum_{n=1}^{[t]} \frac{1}{m_k(n)} \to +\infty, \quad t \to +\infty,$$

а це означає, що $\langle x(\cdot)\rangle_t \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Із теореми представлення (див. [18, ст. 93]) випливає, що $\eta(t) = x(\langle x(\cdot)\rangle_t^{-1})$ — стандартний вінерівський процес. Нехай

$$\sigma_p = \inf\{t: \ \eta(t) = p\}.$$

Як відомо

$$\mathbb{P}\{\sigma_p < +\infty\} = 1. \tag{2.16}$$

Запишемо

$$p = \eta(\sigma_p) = x(\langle x\rangle_{\sigma_p}^{-1}) = x(\tau_{k,k+p}).$$

Звідси випливає, що

$$\tau_{k,k+p} = \langle x(\cdot)\rangle_{\sigma_p}^{-1}.$$

Із останньої рівності і властивості (2.16) маємо, що $\mathbb{P}\{\tau_{k,k+p} < +\infty\} = 1$. □

Лема 2.5.5. *Для довільного* $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\mathbb{P}\left\{\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{|x_0(t)|}{\sqrt{2t\,\ln\ln t}} = 0\right\} = 1,$$

$$\mathbb{P}\left\{\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{|x_0(t)|}{\sqrt[4]{t^{1-\varepsilon}}}=\infty\right\}=1.$$

Доведення. Доведемо першу рівність.

Як і у випадку леми 2.5.4, можна показати, що $\langle x_0(\cdot)\rangle_t \to +\infty$ при $t\to+\infty$. Із теореми представлення (див. [18, ст. 93]) випливає, що існує стандартний вінерівський процес w такий, що

$$x_0(t)=w(\langle x_0(\cdot)\rangle_t).$$

Використовуючи закон повторного логарифма для вінерівського процесу (див. [16, ст. 73]), маємо

$$\mathbb{P}\left\{\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{|w(\langle x_0(\cdot)\rangle_t)|}{\sqrt{2\langle x_0(\cdot)\rangle_t\ \ln\ln\langle x_0(\cdot)\rangle_t}}=1\right\}=1.$$

Візьмемо довільне $p\in\mathbb{N}$ і виберемо t_0 так, щоб $m_0(t_0)\geq p$. Тоді для $t\geq t_0$

$$\langle x_0(\cdot)\rangle_t=\int\limits_0^t\frac{ds}{m_0(s)}=\int\limits_0^{t_0}\frac{ds}{m_0(s)}+\int\limits_{t_0}^t\frac{ds}{m_0(s)}\leq c(t_0)+\frac{1}{p}t.$$

Звідси

$$1=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{|x_0(t)|}{\sqrt{2\langle x_0(\cdot)\rangle_t\ \ln\ln\langle x_0(\cdot)\rangle_t}}\geq$$
$$\geq\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{|x_0(t)|}{\sqrt{2(c(t_0)+\frac{1}{p}t)\ \ln\ln(c(t_0)+\frac{1}{p}t)}}=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{|x_0(t)|}{\sqrt{2\frac{1}{p}t\ \ln\ln t}}.$$

Тоді

$$\mathbb{P}\left\{\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{|x_0(t)|}{\sqrt{2t\ \ln\ln t}}\leq\frac{1}{\sqrt{p}}\right\}=1.$$

Прямуючи p до нескінченості, отримаємо доведення першої рівності.

Доведемо другу рівність. Використаємо позначення із доведення леми 2.5.3. Маємо

$$\exists N\in\mathbb{N}\quad\forall p\geq N\quad m_0(n_{p+1})\leq\lambda\varphi(n_p).$$

Візьмемо $t \in [n_p, n_{p+1})$, тоді в силу монотонності $m_0(\cdot)$ отримаємо, що

$$m_0(t) \le m_0(n_{p+1}) \le \lambda\varphi(n_p) \le \lambda\varphi(t).$$

Нехай $\varepsilon \in (0,1)$, $t_0 = n_N \vee \sup\{t :\ \ln\ln t > t^\varepsilon\}$ і $t \ge t_0$. Розглянемо

$$\langle x_0(\cdot)\rangle_t = \int\limits_0^t \frac{ds}{m_0(s)} = \int\limits_0^{t_0} \frac{ds}{m_0(s)} + \int\limits_{t_0}^t \frac{ds}{m_0(s)} \ge$$
$$\ge a(t_0) + \int\limits_{t_0}^t \frac{ds}{\lambda\varphi(s)} = a(t_0) + \int\limits_{t_0}^t \frac{ds}{\lambda 4\sqrt{s\ \ln\ln s}} \ge$$
$$\ge a(t_0) + \int\limits_{t_0}^t \frac{ds}{\lambda 4\sqrt{s^{1+\varepsilon}}} = b(t_0) + \frac{1}{2\lambda(1-\varepsilon)}\sqrt{t^{1-\varepsilon}}.$$

Звідси

$$1 = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{|x_0(t)|}{\sqrt{2\langle x_0(\cdot)\rangle_t\ \ln\ln\langle x_0(\cdot)\rangle_t}} \le$$
$$\le \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{|x_0(t)|}{\sqrt{2\left(b(t_0) + \frac{1}{2\lambda(1-\varepsilon)}\sqrt{t^{1-\varepsilon}}\right)}} =$$
$$= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{|x_0(t)|}{\sqrt{2\frac{1}{2\lambda(1-\varepsilon)}\sqrt{t^{1-\varepsilon}}}} = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{|x_0(t)|}{\sqrt{\frac{\sqrt{t^{1-\varepsilon}}}{\lambda(1-\varepsilon)}}} = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{|x_0(t)|}{\frac{\sqrt[4]{t^{1-\varepsilon}}}{\sqrt{\lambda(1-\varepsilon)}}}.$$

Прямуючи λ до одиниці та враховуючи довільність ε, отримаємо потрібну рівність. □

Висновки до розділу 2

1. Для випадку нескінченного числа частинок отримано достатні умови, яким повинен задовольняти розподіл маси частинок на прямій в момент старту, щоб існувала сукупність процесів, яка описує еволюцію системи частинок зі склеюванням змінної маси.

2. Побудовано випадковий процес у просторі неспадних послідовностей $\mathcal{M}$, який описує рух кожної окремої частинки, перевірена його неперервність, встановлена марковська властивість і розв'язана проблема мартингалів для нього.
3. Вивчено випадок випадкового старту, а саме: встановлено, що існує математична модель нашої системи, коли початковий розподіл маси частинок є стаціонарний, і показано, що маса, яка переноситься частинками, також є стаціонарна в довільний фіксований момент часу.
4. Досліджена асимптотична поведінка окремої частинки на нескінченності та встановлено асимптотичні обмеження на ріст її маси.

Побудова випадкового процесу, який задає рух нескінченного числа частинок, та асимптотичні властивості системи міститься у роботі автора [13], а випадок стаціонарного старту описаний у роботі автора [14].

РОЗДІЛ 3
МІРОЗНАЧНІ ПРОЦЕСИ, ЩО ВІДПОВІДАЮТЬ СИСТЕМАМ ВЗАЄМОДІЮЧИХ ДИФУЗІЙНИХ ЧАСТИНОК

У даному розділі побудовано метричний простір локально скінченних цілочисельних мір на прямій та дано математичний опис системи важких дифузійних частинок у термінах еволюції випадкової міри у цьому просторі. Також для такого процесу розв'язана проблема мартингалів і знайдено вигляд генератора.

3.1 Простір $\mathcal{H}$

Метою даного пункту є визначення метричного простору, у якому буде задаватись еволюція нашої системи. Точками простору будуть локально скінченні цілочисельні міри на прямій, які задовольняють деяким умовам. Отже, нехай $\mathcal{H}$ — множина цілочисельних мір μ на $\mathbb{R}$, для яких

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mu([0,n))}{n}=1,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\mu([-n,0))}{n}=1 \tag{3.1}$$

(в силу умови (3.1) міра μ є локально скінченною).

Відмітимо, що довільну міру μ із $\mathcal{H}$ можна подати у вигляді

$$\mu=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{x_k}, \tag{3.2}$$

де $\{x_k,\ k\in\mathbb{Z}\}$ — неспадна послідовність дійсних чисел. Використовуючи формулу (3.2), між елементами простору $\mathcal{M}$ та множини $\mathcal{H}$ можна встановити наступний зв'язок.

Лема 3.1.1. *Міра μ лежить в $\mathcal{H}$ тоді і тільки тоді, коли знайдеться елемент $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ із $\mathcal{M}$ такий, що $\mu=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{x_k}$.*

Доведення. Нехай $\mu = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{x_k} \in \mathcal{H}$ і нумерація x_k вибрана так, що $x_1 \geq 0$ та $x_0 < 0$. Кожному числу $m \in \mathbb{N}$ поставимо у відповідність $n_m \in \mathbb{N}$ за наступним правилом

$$n_m - 1 < x_m \leq n_m. \tag{3.3}$$

Тоді має місце нерівність

$$\mu([0, n_m - 1]) < m \leq \mu([0, n_m]).$$

З останньої нерівності випливає, що $\frac{m}{n_m} \to 1$ при $m \to \infty$. Використовуючи (3.3), бачимо, що $\frac{x_m}{m} \to 1$ при $m \to +\infty$. З іншого боку, якщо $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{M}$, то виберемо $l \in \mathbb{Z}$ так, щоб $x_{1+l} \geq 0$ та $x_l < 0$. Позначимо $x'_k = x_{k+l}$. Зрозуміло, що $(x'_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{M}$. Визначивши міру $\mu = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{x'_k}$, позначимо $\mu([0, n]) = m_n$. Отримаємо

$$x_{m_n} \leq n < x_{m_n+1}.$$

Звідси, оскільки $\frac{x_{m_n}}{m_n} \to 1$, то $\frac{n}{m_n} \to 1$ при $n \to \infty$. $\square$

Далі введемо метрики на $\mathcal{H}$. Розглянемо множину неперервних відображень з $\mathbb{R}$ в $[0, 1]$

$$\Phi^+ = \{\varphi_k^+,\ k \in \mathbb{N}\},$$

де $\varphi_k^+(x) = 0$ для $x \notin [0, k+1]$ та $\varphi_k^+(x) = 1$ для $x \in [\frac{1}{2}, k]$, $k \in \mathbb{N}$. Позначимо

$$\Phi^- = \{\varphi_k^- :\ \varphi_k^-(x) = \varphi_k^+(-x),\ x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Нехай $\mathrm{C}_C(\mathbb{R})$ — простір неперервних функцій на $\mathbb{R}$ з компактним носієм, а $\widetilde{Q} = \{g_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ — деяка підмножина цього простору така, що задовольняє наступну властивість: для довільної $f \in \mathrm{C}_C(\mathbb{R})$ знайдеться компакт $K_f \supset \operatorname{supp} f$ такий, що для будь-яких $\varepsilon > 0$ існує $g_k \in \widetilde{Q}$, носій якої лежить в K_f, і $\|f - g_k\| < \varepsilon$.

Візьмемо $Q = \widetilde{Q} \cup \{\varphi_k^+(x - k/2),\ k \in \mathbb{N}\}$. Для $\mu, \nu \in \mathcal{H}$ визначимо

$$d(\mu,\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left[|\langle f_k, \mu\rangle - \langle f_k, \nu\rangle| \wedge 1 \right],$$

де $\langle f, \mu\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx)$ та $Q = \{f_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

Лема 3.1.2. *Для довільної послідовності* $\{\mu_n,\ n \geq 0\} \subset \mathcal{H}$ $d(\mu_n, \mu_0) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *тоді і тільки тоді, коли для довільної функції* $f \in \mathrm{C}_C(\mathbb{R})$ $\langle f, \mu_n\rangle \to \langle f, \mu_0\rangle$ *при* $n \to \infty$.

Доведення. Достатність твердження леми очевидна. Доведемо необхідність. Нехай $d(\mu_n, \mu_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Розглянемо $f \in \mathrm{C}_C(\mathbb{R})$ і покажемо, що $\langle f, \mu_n\rangle \to \langle f, \mu_0\rangle$ при $n \to \infty$. Нехай $\varepsilon > 0$. Виберемо $g \in Q$ так, щоб $\operatorname{supp} g \subset K_f$ та

$$\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{3C},$$

де $C = \sup\limits_{n \geq 0} \mu_n(K_f)$. Відмітимо, що $C < \infty$, оскільки для довільного k послідовність $\{\langle \varphi_k^+(\cdot - k/2), \mu_n\rangle\}_{n\geq 1}$ збігається до $\langle \varphi_k^+(\cdot - k/2), \mu_0\rangle$. Розглянемо

$$\begin{aligned} |\langle f, \mu_n\rangle - \langle f, \mu_0\rangle| &\leq |\langle f, \mu_n\rangle - \langle g, \mu_n\rangle| + |\langle g, \mu_n\rangle - \langle g, \mu_0\rangle| + \\ &+ |\langle g, \mu_0\rangle - \langle f, \mu_0\rangle| \leq \int\limits_{K_f} |f - g| d\mu_n + |\langle g, \mu_n\rangle - \langle g, \mu_0\rangle| + \\ &+ \int\limits_{K_f} |f - g| d\mu_0 < \frac{2\,\varepsilon}{3} + |\langle g, \mu_n\rangle - \langle g, \mu_0\rangle|. \end{aligned}$$

Взявши номер N так, щоб для довільного $n \geq N$ $|\langle g, \mu_n\rangle - \langle g, \mu_0\rangle| < \frac{\varepsilon}{3}$, отримаємо доведення леми. □

Зауваження 3.1.1. *Оскільки метрика d породжує найслабшу топологію, відносно якої неперервні усі функціонали вигляду $\langle f, \cdot\rangle$, $f \in \mathrm{C}_C(\mathbb{R})$, то d називають метрикою слабкої збіжності.*

Тепер ми можемо задати на $\mathcal{H}$ метрику так, щоб він став повним сепарабельним метричним простором. Визначимо для $\mu, \nu \in \mathcal{H}$

$$\gamma(\mu,\nu) = d(\mu,\nu) + \max_{k\geq 1} \frac{|\langle \varphi_k^-, \mu\rangle - \langle \varphi_k^-, \nu\rangle|}{k} + \max_{k\geq 1} \frac{|\langle \varphi_k^+, \mu\rangle - \langle \varphi_k^+, \nu\rangle|}{k},$$

де функції $\varphi_k^+,\ \varphi_k^-$ лежать в $\Phi^+,\ \Phi^-$ відповідно.

Лема 3.1.3. $(\mathcal{H},\gamma)$ *є повним сепарабельним метричним простором.*

Доведення. Нехай $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ — фундаментальна послідовність в $\mathcal{H}$. Тоді $d(\mu_n,\mu_m)\to 0$ при $n,m\to\infty$. Звідси [31, ст. 40] існує міра μ така, що $\mu(K)<\infty$ для довільного компакту $K\subset\mathbb{R}$ і $d(\mu,\mu_n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Покажемо, що $\mu\in\mathcal{H}$ та $\gamma(\mu,\mu_n)\to 0$ при $n\to\infty$. Нехай A — обмежена борелевська множина така, що $\mu(\partial A)=0$. Тоді $\mu_n(A)\to\mu(A)$, а отже, $\mu(A)\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Звідси μ — цілочисельна міра. Перевіримо, що μ задовольняє умову (3.1) та $\gamma(\mu,\mu_n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Оскільки

$$\max_{k\geq 1}\frac{|\langle\varphi_k^+,\mu_n\rangle-\langle\varphi_k^+,\mu_m\rangle|}{k}\to 0\quad\text{при}\quad n,m\to\infty,$$

то послідовність $\left\{\left(\frac{\langle\varphi_k^+,\mu_n\rangle}{k}\right)_{k\geq 1},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ є фундаментальною у просторі збіжних послідовностей c. В силу повноти c існує елемент $(a_k)_{k\geq 1}$ в c такий, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\langle\varphi_k^+,\mu_n\rangle}{k}\right)_{k\geq 1}=(a_k)_{k\geq 1}\quad\text{в}\quad c.$$

Із слабкої збіжності послідовності $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ випливає, що для довільного $k\geq 1$

$$\frac{\langle\varphi_k^+,\mu_n\rangle}{k}\to\frac{\langle\varphi_k^+,\mu\rangle}{k}\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Звідси $a_k=\frac{\langle\varphi_k^+,\mu\rangle}{k}$, $k\geq 1$, і

$$\max_{k\geq 1}\frac{|\langle\varphi_k^+,\mu\rangle-\langle\varphi_k^+,\mu_n\rangle|}{k}\to 0\quad\text{при } n\to\infty.$$

Крім того, зрозуміло, що

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\langle\varphi_k^+,\mu\rangle}{k}=1,$$

а отже,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mu([0,k))}{k}=1.$$

Пробивши аналогічні міркування для послідовності $\left\{\left(\frac{\langle\varphi_k^-,\mu_n\rangle}{k}\right)_{k\geq 1},\ n\in\mathbb{N}\right\}$, отримаємо, що $\mu\in\mathcal{H}$ та $\gamma(\mu,\mu_n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Покажемо, що $(\mathcal{H},\gamma)$ — сепарабельний. Визначимо на $\mathcal{H}\times c^2$ метрику. Візьмемо для $\alpha_i=(\mu^i,(a_k^i)_{k\geq 1},(b_k^i)_{k\geq 1})\in\mathcal{H}\times c^2$, $i=1,2$,

$$\widetilde{\gamma}(\alpha_1,\alpha_2)=d(\mu^1,\mu^2)+\max_{k\geq 1}|a_k^1-a_k^2|+\max_{k\geq 1}|b_k^1-b_k^2|,$$

де d — метрика слабкої збіжності на $\mathcal{H}$. Оскільки

$$G=\left\{\left(\mu,\left(\frac{\langle\varphi_k^+,\mu\rangle}{k}\right)_{k\geq 1},\left(\frac{\langle\varphi_k^-,\mu\rangle}{k}\right)_{k\geq 1}\right):\ \mu\in\mathcal{H}\right\}$$

є підмножиною сепарабельного метричного простору $(\mathcal{H}\times c^2,\widetilde{\gamma})$, то метричний простір $(G,\widetilde{\gamma})$ також сепарабельний (див., наприклад, Теорема 1.6.12 [27, ст. 32]). З ізометричності $(\mathcal{H},\gamma)$ та $(G,\widetilde{\gamma})$ випливає, що $(\mathcal{H},\gamma)$ — сепарабельний метричний простір. □

3.2 Система взаємодіючих частинок як випадковий процес в $\mathcal{H}$

Метою даного пункту є опис системи важких дифузійних частинок за допомогою неперервного процесу у просторі $\mathcal{H}$. Цей процес будемо будувати, використовуючи процес важких дифузійних частинок в $\mathcal{M}$. Визначимо

$$\mu_t=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{x_k(t)},\quad t\geq 0, \tag{3.4}$$

де $\{(x_k(t))_{k\in\mathbb{Z}},\ t\geq 0\}$ — процес важких дифузійних частинок в $\mathcal{M}$.

Основним результатом даного параграфу є наступна теорема.

Теорема 3.2.1. $\{\mu_t,\ t\geq 0\}$ *є неперервним випадковим процесом у просторі* $\mathcal{H}$.

Зауваження 3.2.1. *Складність доведення даної теореми полягає у перевірці неперервності траєкторій* $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$*. Однак цю складність можна подолати, використовуючи те, що частинки за скінченний проміжок часу не встигають сильно відхилитись від свого початкового положення, оскільки їхній рух є схожим на броунівський (див. доведення твердження 2.2.1).*

Доведення теореми 3.2.1. Згідно леми 3.1.1 для довільного $t \geq 0$ μ_t лежить в $\mathcal{H}$. Покажемо, що μ_t — випадковий елемент у просторі $\mathcal{H}$. Зауважимо, що метрики в $\mathcal{H}$

$$\overline{\gamma}(\mu,\nu) = d(\mu,\nu) \vee \max_{k\geq 1} \frac{|\langle \varphi_k^-, \mu\rangle - \langle \varphi_k^-, \nu\rangle|}{k} \vee \max_{k\geq 1} \frac{|\langle \varphi_k^+, \mu\rangle - \langle \varphi_k^+, \nu\rangle|}{k}$$

та γ — еквівалентні. Отже, в силу еквівалентності метрик та сепарабельності простору $(\mathcal{H}, \overline{\gamma})$ достатньо перевірити, що для довільного $C > 0$ та $\nu \in \mathcal{H}$ множина $\{\overline{\gamma}(\mu_t,\nu) \leq C\}$ є випадковою подією. Позначимо

$$A_1 = \{d(\mu_t,\nu) \leq C\},$$
$$A_2 = \left\{\max_{k\geq 1} \frac{|\langle \varphi_k^+, \mu_t\rangle - \langle \varphi_k^+, \nu\rangle|}{k} \leq C\right\},$$
$$A_3 = \left\{\max_{k\geq 1} \frac{|\langle \varphi_k^-, \mu_t\rangle - \langle \varphi_k^-, \nu\rangle|}{k} \leq C\right\}.$$

Оскільки для довільної неперервної на $\mathbb{R}$ функції f з компактним носієм $\langle f, \mu_t\rangle$ є випадковою величиною, то $A_1 \in \mathcal{F}$. Далі, оскільки має місце рівність

$$A_2 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{|\langle \varphi_k^+, \mu_t\rangle - \langle \varphi_k^+, \nu\rangle|}{k} \leq C\right\},$$

то A_2 — випадкова подія. Аналогічно A_3 є випадковою подією, тобто $A_3 \in \mathcal{F}$. Оскільки $\{\overline{\gamma}(\mu_t,\nu) \leq C\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \in \mathcal{F}$, то μ_t є випадковим елементом в $(\mathcal{H}, \gamma)$.

Покажемо, що процес $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$ має неперервні траєкторії. Спочатку для довільного $T > 0$ доведемо наступну рівність

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{k\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\frac{|\langle\varphi_k^+,\mu_t\rangle - \langle\varphi_k^+,\mu_0\rangle|}{k} = 0\right\} = 1. \tag{3.5}$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $x_0(0) \geq 0$ і $x_{-1}(0) < 0$.

Нехай

$$\Omega_T = \left\{\lim_{k\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\frac{|\widetilde{x}_k(t)|}{(1+|k|)^\alpha} = 0\right\},$$

де $\widetilde{x}_k(t) = x_k(t) - x_k(0)$ та $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. Позначимо $\Omega' = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_n$. Згідно зауваження 2.2.2

$$\mathbb{P}\{\Omega'\} = 1.$$

Візьмемо $\omega \in \Omega'$ і $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Із вибору ω випливає існування константи $C = C(\omega) > 0$ такої, що для будь-якого k

$$\max_{t\in[0,T]}|x_k(t,\omega) - x_k(0)| < C(1+|k|)^\alpha.$$

Оскільки $(x_k(0))_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{M}$, то існує номер N такий, що

$$C(1+N)^\alpha < \varepsilon N,$$
$$N > C\left(1 + \left[\frac{N}{1-\varepsilon}\right]\right)^\alpha$$

та для довільного $n \geq N$

$$n(1-\varepsilon) < x_n(0) < n(1+\varepsilon).$$

Нехай $n \geq N$. З останньої нерівності випливає, що

$$x_{\left[\frac{n}{1-\varepsilon}\right]+1}(0) > n. \tag{3.6}$$

Звідси, якщо $0 \leq x_k(0) < n - C\left(1 + \left[\frac{n}{1-\varepsilon}\right]\right)^\alpha$, то

$$\max_{t\in[0,T]} x_k(t,\omega) < n.$$

Справді

$$\max_{t\in[0,T]} x_k(t,\omega) \le \max_{t\in[0,T]} |x_k(t,\omega) - x_k(0)| + x_k(0) <$$
$$< C\,(1+k)^{\alpha} + n - C\left(1 + \left[\frac{n}{1-\varepsilon}\right]\right)^{\alpha} \le n.$$

Тут останній перехід вірний в силу того, що з (3.6) випливає нерівність $k \le \left[\frac{n}{1-\varepsilon}\right]$. Аналогічно, якщо $x_k(0) > n + C\left(1 + \left[\frac{n}{1-2\,\varepsilon}\right]\right)^{\alpha}$, то

$$\min_{t\in[0,T]} x_k(t,\omega) > n.$$

Дійсно, розглянемо два випадки:

1. Нехай $k > \left[\frac{n}{1-2\,\varepsilon}\right]$. Звідси

$$\min_{t\in[0,T]} x_k(t,\omega) \ge x_k(0) - \max_{t\in[0,T]} |x_k(t,\omega) - x_k(0)| >$$
$$> k(1-\varepsilon) - C\,(1+k)^{\alpha} > k(1-\varepsilon) - k\,\varepsilon = k(1-2\,\varepsilon) > n.$$

2. Для $0 \le k \le \left[\frac{n}{1-2\,\varepsilon}\right]$ маємо

$$\min_{t\in[0,T]} x_k(t,\omega) \ge x_k(0) - \max_{t\in[0,T]} |x_k(t,\omega) - x_k(0)| >$$
$$> n + C\left(1 + \left[\frac{n}{1-2\,\varepsilon}\right]\right)^{\alpha} - C\,(1+k)^{\alpha} \ge n.$$

Далі позначимо

$$k' = \max\left\{k < 0 :\ \max_{t\in[0,T]} x_k(t,\omega) < 0\right\},$$
$$k'' = \min\left\{k \ge 0 :\ \min_{t\in[0,T]} x_k(t,\omega) \ge 0\right\}.$$

На основі спостережень, зроблених вище, оцінимо різницю

$$\max_{t\in[0,T]} |\mu_t([0,n],\omega) - \mu_0([0,n])| \le \mu_0([x_{k'}(0), x_{k''}(0)]) +$$
$$+ \mu_0\left(\left[n - C\left(1 + \left[\frac{n}{1-\varepsilon}\right]\right)^{\alpha}, n + C\left(1 + \left[\frac{n}{1-2\,\varepsilon}\right]\right)^{\alpha}\right]\right).$$

Зрозуміло, що

$$\frac{\max_{t\in[0,T]} |\mu_t([0,n],\omega) - \mu_0([0,n])|}{n} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Звідси легко бачити, що рівність (3.5) має місце. Аналогічно для довільного $T > 0$

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{k\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\frac{|\langle\varphi_k^-,\mu_t\rangle - \langle\varphi_k^-,\mu_0\rangle|}{k} = 0\right\} = 1.$$

Тепер перейдемо безпосередньо до доведення неперервності траєкторій процесу $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$. Візьмемо $\omega \in \Omega'$ і покажемо, що $\gamma(\mu_{t_n}(\omega), \mu_{t_0}(\omega)) \to 0$ при $t_n \to t_0$. Збіжність $d(\mu_{t_n}(\omega), \mu_{t_0}(\omega))$ до нуля випливає з леми 3.1.2. Далі візьмемо $\varepsilon > 0$ та номер K такий, що

$$\max_{k>K}\max_{t\in[0,m]}\frac{|\langle\varphi_k^+,\mu_t(\omega)\rangle - \langle\varphi_k^+,\mu_0\rangle|}{k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тут $m = \left[\sup_{n\geq 0} t_n\right] + 1$. Знову ж таки в силу леми 3.1.2 існує N, що для довільного $n \geq N$

$$\max_{k=1,\ldots,K}\frac{|\langle\varphi_k^+,\mu_{t_n}(\omega)\rangle - \langle\varphi_k^+,\mu_{t_0}(\omega)\rangle|}{k} < \varepsilon\,.$$

Запишемо для $k > K$

$$\max_{k>K}\frac{|\langle\varphi_k^+,\mu_{t_n}(\omega)\rangle - \langle\varphi_k^+,\mu_{t_0}(\omega)\rangle|}{k} \leq \max_{k>K}\frac{|\langle\varphi_k^+,\mu_{t_n}(\omega)\rangle - \langle\varphi_k^+,\mu_0\rangle|}{k} + \\ + \max_{k>K}\frac{|\langle\varphi_k^+,\mu_0\rangle - \langle\varphi_k^+,\mu_{t_0}(\omega)\rangle|}{k} < \varepsilon\,.$$

Звідси

$$\max_{k\geq 1}\frac{|\langle\varphi_k^+,\mu_{t_n}(\omega)\rangle - \langle\varphi_k^+,\mu_{t_0}(\omega)\rangle|}{k} \to 0$$

при $t_n \to t_0$. Аналогічно

$$\max_{k\geq 1}\frac{|\langle\varphi_k^-,\mu_{t_n}(\omega)\rangle - \langle\varphi_k^-,\mu_{t_0}(\omega)\rangle|}{k} \to 0$$

при $t_n \to t_0$.

Це доводить дану теорему. $\square$

Означення 3.2.1. *Випадковий процес $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$ називатимемо процесом важких дифузійних частинок в $\mathcal{H}$, якщо існує*

$\{(x_k(t))_{k\in\mathbb{Z}},\ t \geq 0\}$ *— процес важких дифузійних частинок в* $\mathcal{M}$ *такий, що*

$$\mu_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{x_k(t)}, \quad t \geq 0.$$

Наступне твердження говорить про існування неперервного процесу важких дифузійних частинок в $\mathcal{H}$, який стартував з довільної наперед заданої точки $\mathcal{H}$. Воно є прямим наслідком леми 3.1.1 та попередньої теореми.

Твердження 3.2.1. *Для довільної цілочисельної міри* $\mu \in \mathcal{H}$ *існує неперервний процес важких дифузійних частинок в* $\mathcal{H}$ $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$ *такий, що* $\mu_0 = \mu$.

Отже, у даному пункті ми побудували випадковий процес зі значеннями в повному сепарабельному метричному просторі $(\mathcal{H}, \gamma)$, який є математичним описом системи дифундуючих частинок, що вивчаються у даній дисертаційній роботі.

3.3 Проблема мартингалів для скінченного числа частинок у просторі цілочисельних мір

Оскільки основна мета даного розділу — розв'язання проблеми мартингалів для процесу важких дифузійних частинок в $\mathcal{H}$, то даний пункт присвячено проблемі мартингалів, розв'язок якої є мірозначним процесом, що задає поведінку скінченного числа частинок. Це зв'язано з тим, що при доведенні єдиності проблеми мартингалів у просторі $\mathcal{H}$ ми будемо переходити від скінченної системи до нескінченної. У даному параграфі ми працюватимемо з цілочисельними мірами, які мають скінченну кількість атомів. Отже, нехай

$$\mathcal{H}_n = \{\mu : \ \mu \ - \ \text{цілочисельна міра на } \mathbb{R},\ \mu(\mathbb{R}) = n\}.$$

Розглядатимемо $\mathcal{H}_n$ як метричний простір з метрикою слабкої збіжності d_n. Визначимо на $\mathcal{H}_n$ мірозначний процес

$$\mu_t = \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k(t)}, \quad t \geq 0, \tag{3.7}$$

де $\{(x_1(t), \ldots, x_n(t)),\ t \geq 0\}$ — процес важких дифузійних частинок в E^n. Для цього процесу знайдемо вигляд генератора та розв'яжемо проблему мартингалів. Оскільки ми маємо справу з процесом, значеннями якого є міри, то генератор зручно задавати на поліномах, що залежать від мір, тобто функціях вигляду

$$F_{\varphi,m} = \langle \varphi, \mu^{\otimes m} \rangle = \int \varphi(x_1, \ldots, x_m)\mu(dx_1) \ldots \mu(dx_m)$$

(див., наприклад, [5, 22, 31, 32]).

Визначимо множину, на якій задамо наш оператор. Нехай $\mathrm{C_{sym}}(\mathbb{R}^n)$ — клас неперервних функцій на $\mathbb{R}^n$, симетричних відносно усіх перестановок координат, що зануляються на нескінченності. Визначимо відображення

$$\Xi_n : \mathrm{C}_0(E^n) \to \mathrm{C_{sym}}(\mathbb{R}^n)$$

за наступним правилом

$$\Xi_n(f) = f\big|_{E^n}.$$

Розглянемо клас функцій

$$\Phi_n = \left\{ \varphi :\ \exists\, \widetilde{\varphi} \in \mathfrak{D}^0_{E^n}\ \exists\, K \in \mathfrak{S}^n\ \Xi_n(\widetilde{\varphi})\big|_{S^n_K} = \varphi \right\}.$$

Нехай

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_n} = \text{ЛО}\left\{ F_{\varphi,m} :\ \varphi \in \Phi_n,\ m \leq n \right\}.$$

Знайдемо генератор випадкового процесу $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$. Для цього візьмемо $F_{\varphi,m} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_n}$ та застосуємо до $F_{\varphi,m}(\mu_t)$ формулу Іто. Отримаємо

$$F_{\varphi,m}(\mu_t) = \sum_{k_1,\ldots,k_m} \varphi(x_{k_1}(t),\ldots,x_{k_m}(t)) =$$
$$= \sum_{k_1,\ldots,k_m} \varphi(x_{k_1}(0),\ldots,x_{k_m}(0)) +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k_1,\ldots,k_m}\sum_{i,j=1}^{m}\int_0^t \varphi''_{i,j}(x_{k_1}(s),\ldots,x_{k_m}(s))d\langle x_{k_i}(\cdot),x_{k_j}(\cdot)\rangle_s +$$
$$+ \sum_{k_1,\ldots,k_m}\sum_{i=1}^{m}\int_0^t \varphi'_{i}(x_{k_1}(s),\ldots,x_{k_m}(s))dx_{k_i}(s). \quad (3.8)$$

Обчислимо

$$\sum_{k_1,\ldots,k_m}\sum_{i,j=1}^{m}\int_0^t \varphi''_{i,j}(x_{k_1}(s),\ldots,x_{k_m}(s))d\langle x_{k_i}(\cdot),x_{k_j}(\cdot)\rangle_s =$$
$$= \sum_{k_1,\ldots,k_m}\sum_{i,j=1}^{m}\int_0^t \frac{\varphi''_{i,j}(x_{k_1}(s),\ldots,x_{k_m}(s))}{m_{k_i}(s)}\,\mathbb{I}_{\{\tau_{k_i,k_j}<s\}}\,ds =$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\int_0^t \sum_{k_1,\ldots,k_m} \frac{\varphi''_{i,i}(x_{k_1}(s),\ldots,x_{k_m}(s))}{m_{k_i}(s)}ds +$$
$$+ \sum_{i\neq j}\int_0^t \sum_{\{k_1,\ldots,k_m\}\setminus\{k_j\}}\sum_{k_j} \frac{\varphi''_{i,j}(x_{k_1}(s),\ldots,x_{k_m}(s))}{m_{k_i}(s)}\,\mathbb{I}_{\{\tau_{k_i,k_j}<s\}}\,ds =$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\int_0^t \sum_{k_1,\ldots,k_m} \frac{\varphi''_{i,i}(x_{k_1}(s),\ldots,x_{k_m}(s))}{m_{k_i}(s)}ds +$$
$$+ \int_0^t \sum_{i\neq j}\sum_{\{k_1,\ldots,k_m\}\setminus\{k_j\}} \varphi''_{i,j}(\ldots,x_{k_i}(s),\ldots,x_{k_i}(s),\ldots)ds.$$

Позначимо

$$\frac{\delta F_{\varphi,m}(\mu)}{\delta\mu(x)} = \sum_{j=1}^{m}\int\cdots\int_{\mathbb{R}^{m-1}} \varphi(x_1,\ldots,x_{j-1},x,x_{j+1},\ldots,x_m)\prod_{i\neq j}\mu(dx_i),$$

$$\frac{\delta^2 F_{\varphi,m}(\mu)}{\delta\mu(x)\delta\mu(y)} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \underset{\mathbb{R}^{m-2}}{\int\cdots\int} \varphi(x_1,\ldots,x_{j-1},x,x_{j+1},\ldots$$

$$\ldots,x_{k-1},y,x_{k+1},\ldots,x_m)\prod_{i\neq j,k}\mu(dx_i).$$

Тоді

$$\sum_{k_1,\ldots,k_m}\sum_{i,j=1}^{m}\int_0^t \varphi''_{i,j}(x_{k_1}(s),\ldots,x_{k_m}(s))d\langle x_{k_i}(\cdot),x_{k_j}(\cdot)\rangle_s =$$

$$= \int_0^t \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{d^2}{dx^2}\frac{\delta F_{\varphi,m}(\mu)}{\delta\mu(x)}(\mu_s)^*(dx) + \right.$$

$$\left. + \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{\delta^2 F_{\varphi,m}(\mu)}{\delta\mu(x)\delta\mu(y)}\delta_x(dy)\mu_s(dx)\right] ds,$$

де $\mu^* = \sum_{y\in\operatorname{supp}\mu}\delta_y$.

Зауваження 3.3.1. *Нескладно перевірити, що для довільної функції* $\varphi\in \mathrm{C}_C(\mathbb{R}^n)$ *похідна* $\frac{\delta F_{\varphi,n}(\mu)}{\delta\mu(x)}$ *є звичайною похідною у напрямку* δ_x, *тобто*

$$\frac{\delta F_{\varphi,n}(\mu)}{\delta\mu(x)} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{F_{\varphi,n}(\mu+\varepsilon\,\delta_x)-F_{\varphi,n}(\mu)}{\varepsilon}.$$

(див., наприклад, [31]).

Згідно зроблених вище обчислень, роль генератора для процесу важких дифузійних частинок в $\mathcal{H}$ відіграватиме

$$\mathfrak{G}_{\mathcal{H}_n} F_{\varphi,m}(\mu) = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{\delta^2 F_{\varphi,m}(\mu)}{\delta\mu(x)\delta\mu(y)}\delta_x(dy)\mu(dx)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\frac{d^2}{dx^2}\frac{\delta F_{\varphi,m}(\mu)}{\delta\mu(x)}\mu^*(dx). \quad (3.9)$$

З (3.8) маємо

$$F_{\varphi,m}(\mu_t) - F_{\varphi,m}(\mu_0) - \int_0^t \mathfrak{G}_{\mathcal{H}_n}(F(\mu_s))ds = \alpha(t). \quad (3.10)$$

Тут $\alpha(t) = \sum\limits_{k_1,\ldots,k_m} \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_0^t \varphi_i'(x_{k_1}(s),\ldots,x_{k_m}(s))dx_{k_i}(s)$. Зрозуміло, що $\alpha(t)$ — мартингал.

Доведемо наступну теорему.

Твердження 3.3.1. *Процес* $\{\mu_t,\ t\geq 0\}$, *заданий формулою* (3.7), *є єдиним розв'язком* $(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}_n},\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_n})$*-проблеми мартингалів.*

Доведення. Існування розв'язку $(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}_n},\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_n})$-проблеми мартингалів доведено вище. Перевіримо єдиність. Для цього покажемо, що для довільної $f\in\mathfrak{D}^0_{E^n}$ існують функції $\{F_{\varphi_k,k},\ k=1,\ldots,n\}\subset\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_n}$ такі, що

$$\widetilde{f}(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}F_{\varphi_k,k}(\mu), \tag{3.11}$$

де $\mu=\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_{x_k}$ та $\widetilde{f}=\Xi_n(f)$.

Введемо деякі позначення. Нехай $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$ — сукупність всіх розбиттів множини $\{1,\ldots,n\}$, тобто $K=\{K_1,\ldots,K_p\}\in\widetilde{\mathfrak{S}}_n$, якщо

a) для довільного $i=1,\ldots,p$ $K_i\subseteq\{1,\ldots,n\}$;

b) для довільних $i\neq j$ $\ K_i\cap K_j=\emptyset$;

c) $\bigcup\limits_{i=1}^{p}K_i=\{1,\ldots,n\}$.

Позначимо для $K=\{K_1,\ldots,K_p\}\in\widetilde{\mathfrak{S}}_n$

$$\widetilde{S}^n_K=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ x_i=x_j\Leftrightarrow\exists K_m,\ x_i,x_j\in K_m\}$$

та

$$\widetilde{\mathfrak{S}}_K=\{\{P_1,\ldots,P_n\}\in\widetilde{\mathfrak{S}}_n:\ \forall K_i\ \exists P_j\ K_i\subseteq P_j\}\setminus\{K\}.$$

Також через $|K|$ позначатимемо кількість мкожин K_i в K. У даному випадку $|K|=p$. Визначимо

$$\int g d\mu^{(m)}=\sum_{(k_1,\ldots,k_m)\in R^n_m}g(x_{k_1},\ldots,x_{k_m}),$$

де $g\in\mathrm{C}_C(\mathbb{R}^m)$, $\mu\in\mathcal{H}_n$ та $R^n_m=\{(k_1,\ldots,k_m):\ k_i\in\{1,\ldots,n\},\ k_i\neq k_j,\ i\neq j\}$. Легко бачити, що для довільного $K=\{K_1,\ldots,K_p\}\in\widetilde{\mathfrak{S}}_n$

$$F_{\widetilde{f}_K,|K|}(\mu)=\int\widetilde{f}_K d\mu^{(|K|)}+\sum_{P\in\widetilde{\mathfrak{S}}_K}\int\widetilde{f}_P d\mu^{(|P|)}. \tag{3.12}$$

Тут

$$\widetilde{f}_K(y_1, \ldots, y_{|K|}) = \widetilde{f}\big|_{\widetilde{S}^n_K}(x_1, \ldots, x_n),$$

де $x \in \widetilde{S}^n_K$.

Використовуючи рівність $\int \widetilde{f} d\mu^{(n)} = n! \widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n)$, формулу (3.12) та те, що для довільного $P \in \widetilde{\mathfrak{S}}_K$ $|P| < |K|$ маємо

$$\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{K \in \widetilde{\mathfrak{S}}_n} C_K F_{\widetilde{f}_K, |K|}(\mu),$$

де $\{C_K,\ K \in \widetilde{\mathfrak{S}}_n\}$ — деякі константи. Далі, оскільки функція $\widetilde{f}$ — симетрична, то для будь-якого $K \in \widetilde{\mathfrak{S}}_n$ знайдеться $K' \in \mathfrak{S}_n$ таке, що $|K| = |K'|$ і $\widetilde{f}_K = \widetilde{f}'_K$. Звідси

$$\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{K' \in \mathfrak{S}_n} C_{K'} F_{\widetilde{f}_{K'}, |K'|}(\mu).$$

З $C_1 F_{\varphi_1, k} + C_2 F_{\varphi_2, k} = F_{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2, k}$ та останньої рівності отримаємо (3.11).

З лінійності $\mathfrak{G}_{\mathcal{H}_n}$ маємо

$$\Xi_n(\mathfrak{G}_{E^n} f)(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{G}_{\mathcal{H}_n} F_{\varphi_k, k}(\mu). \tag{3.13}$$

Тепер перейдемо до доведення єдиності розв'язку $(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}_n}, \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_n})$-проблеми мартингалів. Нехай деякий неперервний $\mathcal{H}_n$-значний випадковий процес $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$ є розв'язком $(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}_n}, \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_n})$-проблеми мартингалів, тобто задовольняє властивість: для довільного $F \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_n}$

$$F(\mu_t) - F(\mu_0) - \int_0^t \mathfrak{G}_{\mathcal{H}_n} F(\mu_s) ds \ - \ \text{мартингал.}$$

Розглянемо відображення

$$\Theta : \mathcal{H}_n \to E^n,$$

яке діє за наступним правилом

$$\Theta \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k} = (x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}),$$

де $(k_1, \ldots, k_n)$ є перестановкою елементів $(1, \ldots, n)$, для якої $x_{k_i} \leq x_{k_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Оскільки на просторі $\mathcal{H}_n$ задана метрика слабкої збіжності, то відображення Θ є неперервною в обидві сторони бієкцією. Використовуючи Θ, визначимо неперервний випадковий процес в E^n

$$X_t = \Theta\mu_t, \quad t \geq 0.$$

Перевіримо, що $\{X_t,\ t \geq 0\}$ — процес важких дифузійних частинок в E^n. Візьмемо $f \in \mathfrak{D}^0_{E^n}$. Використовуючи формули (3.11) та (3.13), маємо

$$f(X_t) - f(X_0) - \int\limits_0^t \mathfrak{G}_{E^n} f(X_s)ds =$$

$$= \Xi_n f(X_t) - \Xi_n f(X_0) - \int\limits_0^t \Xi_n(\mathfrak{G}_{E^n} f)(X_s)ds =$$

$$= \sum_{k=1}^n F_{\varphi_k,k}(\Theta^{-1}X_t) - \sum_{k=1}^n F_{\varphi_k,k}(\Theta^{-1}X_0) - \int\limits_0^t \sum_{k=1}^n \mathfrak{G}_{\mathcal{H}_n} F_{\varphi_k,k}(\Theta^{-1}X_s)ds =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[F_{\varphi_k,k}(\mu_t) - F_{\varphi_k,k}(\mu_0) - \int\limits_0^t \mathfrak{G}_{\mathcal{H}_n} F_{\varphi_k,k}(\mu_s)ds \right] \text{ — мартингал.}$$

З твердження 1.4.3 випливає, що $\{X_t,\ t \geq 0\}$ — процес важких дифузійних частинок в E^n. Використовуючи другу частину теореми 1.2.1 і те, що Θ є бієкцією, отримаємо доведення нашого твердження. $\square$

3.4 Формула Іто для мірозначного процесу

У даному пункті ми покажемо, що процес важких дифузійних частинок в $\mathcal{H}$ є розв'язком деякої проблеми мартингалів. У попередньому параграфі ми знайшли вигляд генератора мірозначного процесу, що задає еволюцію маси скінченної системи частинок. Цей оператор (визначений на дещо іншому класі функцій) буде служити генератором нашого процесу в $\mathcal{H}$.

Отже, позначимо

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{H}} = \text{ЛО}\{F_{\varphi,m} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_n} :$$
$$\varphi \text{ має компактний носій}, \; m \leq n, \; n \in \mathbb{N}\}. \quad (3.14)$$

Оператор вигляду (3.9), який заданий на множині $\mathfrak{D}_{\mathcal{H}}$, позначатимемо символом $\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}$. Доведемо, що для довільного $F_{\varphi,m} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}$

$$F_{\varphi,m}(\mu_t) - F_{\varphi,m}(\mu_0) - \int_0^t \mathfrak{G}_{\mathcal{H}}(F_{\varphi,m}(\mu_s))ds \; - \; \text{мартингал.}$$

Проробивши такі ж обчислення, як у попередньому пункті, отримаємо рівність, аналогічну (3.10), де $\mathfrak{G}_{\mathcal{H}_n}$ замінене на $\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}$.

Покажемо, що $\alpha(\cdot)$ — мартингал. Для зручності обчислень вважаємо, що $m = 1$. Отже,

$$\alpha(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^t \varphi'(x_k(s))dx_k(s).$$

Позначимо

$$\alpha_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \int_0^t \varphi'(x_k(s))dx_k(s).$$

$\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ є послідовністю в просторі неперервних квадратично інтегровних мартингалів з метрикою

$$\rho(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\sqrt{\mathbb{E} \int_0^n (\alpha(t) - \beta(t))^2 dt} \wedge 1 \right).$$

Розглянемо

$$\mathbb{E} \int_0^T (\alpha_n(t) - \alpha_{n+p}(t))^2 dt = \mathbb{E} \int_0^T \left(\sum_{|k|=n+1}^{n+p} \int_0^t \varphi'(x_k(s))dx_k(s) \right)^2 dt =$$
$$= \int_0^T \sum_{|l|,|k|=n+1}^{n+p} \left(\mathbb{E} \int_0^t \varphi'(x_k(s))\varphi'(x_l(s))d\langle x_k(\cdot), x_l(\cdot)\rangle_s \right) dt =$$

$$= \mathbb{E}\int_0^T\int_0^t \sum_{|l|,|k|=n+1}^{n+p} \frac{\varphi'(x_k(s))\varphi'(x_l(s))}{\sqrt{m_k(s)m_l(s)}} \mathbb{I}_{\{s\geq\tau_{k,l}\}}\, dsdt =$$

$$= \mathbb{E}\int_0^T\int_0^t \sum_{|k|=n+1}^{n+p} \frac{\varphi'(x_k(s))^2}{m_k(s)} m_k(s) dsdt =$$

$$= \mathbb{E}\int_0^T\int_0^t \sum_{|k|=n+1}^{n+p} \varphi'(x_k(s))^2 dsdt = \sum_{|k|=n+1}^{n+p} \mathbb{E}\int_0^T\int_0^t \varphi'(x_k(s))^2 dsdt \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}(\varphi'(x))^2 \sum_{|k|=n+1}^{n+p} \int_0^T\int_0^t \mathbb{P}\{x_k(s)\in \operatorname{supp}\varphi'\} dsdt.$$

Нехай $C = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}(\varphi'(x))^2$, $P = \sup\{|x| :\ x \in \operatorname{supp}\varphi'\}$ та $N = \min\{n \in \mathbb{N} :\ x_n(0) > P,\ x_{-n}(0) < P\}$. Тоді для довільного $n \geq N$

$$\mathbb{E}\int_0^T (\alpha_n(t) - \alpha_{n+p}(t))^2 dt \leq C \sum_{|k|=n+1}^{n+p} \int_0^T\int_0^t \mathbb{P}\{|x_k(s)| \leq P\} dsdt \leq$$

$$\leq C \sum_{|k|=n+1}^{n+p} \int_0^T\int_0^t \mathbb{P}\left\{\min_{s\in[0,T]} |x_k(s)| \leq P\right\} dsdt \leq$$

$$\leq \frac{CT^2}{2} \sum_{|k|=n+1}^{n+p} \mathbb{P}\left\{\min_{t\in[0,T]} |x_k(t)| \leq P\right\} \leq$$

$$\leq \frac{CT^2}{2} \sum_{k=n+1}^{n+p} \mathbb{P}\left\{\min_{t\in[0,T]} x_k(t) \leq P\right\} +$$

$$+ \frac{CT^2}{2} \sum_{k=-n-p}^{-n-1} \mathbb{P}\left\{\max_{t\in[0,T]} x_k(t) \geq -P\right\}.$$

Далі використаємо лему 2.5.2. Маємо

$$\mathbb{E}\int_0^T (\alpha_n(t) - \alpha_{n+p}(t))^2 dt \leq \frac{CT^2}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{k=n+1}^{n+p} \int_{-\infty}^{P-x_k(0)} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx +$$

$$+ \frac{CT^2}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{k=-n-p}^{-n-1} \int_{-P-x_k(0)}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \leq \frac{CT^2}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{|k|=n+1}^{n+p} e^{-\frac{(|x_k(0)|-P)^2}{2T}}.$$

Оскільки $(x_k(0))_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{M}$, то за ознакою Коші ряд $\sum\limits_{|k|=N}^{\infty} e^{-\frac{(|x_k(0)|-P)^2}{2T}}$ збігається, а значить $\rho(\alpha_n, \alpha) \to 0$ при $n \to \infty$. Звідси α — неперервний квадратично інтегровний мартингал.

Отже, ми довели наступне твердження.

Твердження 3.4.1. *Нехай оператор* $\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}$ *та множина функцій* $\mathfrak{D}_{\mathcal{H}}$ *визначаються формулами* (3.9) *та* (3.14) *відповідно. Тоді для довільного* $F \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}$

$$F(\mu_t) - F(\mu_0) - \int\limits_0^t \mathfrak{G}_{\mathcal{H}}(F(\mu_s))ds$$

— неперервний квадратично інтегровний мартингал.

3.5 Проблема мартингалів у просторі $\mathcal{H}$

У попередньому пункті ми довели, що процес важких дифузійних частинок в $\mathcal{H}$ є розв'язком $(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}, \mathfrak{D}_{\mathcal{H}})$-проблеми мартингалів. Метою даного параграфа є встановлення єдиності розв'язку. Потрібно відмітити, що при доведенні єдиності виникає наступна проблема. Для того, щоб перевірити, що неперервний процес, який є розв'язком проблеми мартингалів, описує еволюцію маси даної сукупності частинок, нам потрібно виділити з такого мірозначного процесу систему неперервних процесів в $\mathbb{R}$, які б задавали траєкторії цих частинок. Цього ми не вміємо робити, тому нам доведеться дещо змінити класичне означення розв'язку проблеми мартингалів. Згідно ідей, які запропоновані у монографії [9], поряд із процесом в просторі цілочисельних мір розглядатимемо процес у просторі послідовностей.

Означення 3.5.1. *Випадковий процес* $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$ *називатимемо розв'язком* $(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}, \mathfrak{D}_{\mathcal{H}})$*-проблеми мартингалів, якщо*

1) для довільної функції $F \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}$

$$F(\mu_t) - F(\mu_0) - \int\limits_0^t \mathfrak{G}_{\mathcal{H}}(F(\mu_s))ds \ - \ \textit{мартингал};$$

2) існує строго марковський неперервний процес $\{(x_k(t))_{k\in\mathbb{Z}},\ t \geq 0\}$ *в* $\mathcal{M}$ *такий, що*

$$\mu_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{x_k(t)}, \quad t \geq 0;$$

3) для кожного $k \in \mathbb{Z}$ *і довільної функції* $f \in C^2([0,+\infty))$, *обмеженої разом зі своїми похідними, яка задовольняє умову* $f''(0) = 0$, *різниця*

$$f(x_{k+1}(t) - x_k(t)) - \\ - \frac{1}{2}\int_0^t f''(x_{k+1}(s) - x_k(s)) \left[\frac{1}{\sqrt{\nu_{k+1}(s)}} + \frac{1}{\sqrt{\nu_k(s)}}\right] ds$$

є мартингалом. Тут

$$\nu_k(t) = \#\{i:\ x_i(t) = x_k(t)\}. \tag{3.15}$$

Зауваження 3.5.1. *Умова 3) означення 3.5.1 гарантує те, що процеси* $x_k(\cdot)$ *та* $x_l(\cdot)$ *після співпадання не розійдуться, тобто*

$$(x_k(t) - x_l(t))\, \mathbb{I}_{\{t>\tau_{k,l}\}} = 0.$$

Сформулюємо наступну теорему, яка є основним результатом даного параграфа.

Теорема 3.5.1. *Процес важких дифузійних частинок є єдиним розв'язком* $(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}, \mathfrak{D}_{\mathcal{H}})$*-проблеми мартингалів.*

Доведення. Покажемо, що процес важких дифузійних частинок в $\mathcal{H}$ є розв'язком $(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}, \mathfrak{D}_{\mathcal{H}})$-проблеми мартингалів у розумінні означення 3.5.1. Умова 1) випливає з твердження 3.4.1, а 2) — з теореми 2.2.1. Умову 3) легко перевірити, застосувавши до $f(x_{k+1}(t) - x_k(t))$ формулу Іто.

Доведемо єдиність розв'язку. Нехай

$$\mu_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{x_k(t)}, \quad t \geq 0,$$

є розв'язком проблеми мартингалів для $(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}}, \mathfrak{D}_{\mathcal{H}})$. Розглянемо процес ν_n, заданий рівністю (3.15). Оскільки для довільного $t \in [0, T]$ $x_k(t)$ монотонно прямує до нескінченності, то аналогічно, як у доведенні теореми Діні про монотонно зростаючу послідовність неперервних функцій на відрізку, нескладно перевірити, що процес $\nu_n(t)$ обмежений з ймовірністю 1 на $[0, T]$. Із зауваження 3.5.1 випливає, що для довільного $n \in \mathbb{Z}$ він не спадає.

Далі виділимо скінченну множину G атомів міри μ_0, які розміщені підряд. Нехай це $x_{n_1}(0), \ldots, x_{n_2}(0)$. Візьмемо $\tau'_k,\ k > n_2$, – моменти "склеювання" $x_{n_2}(t)$ і $x_k(t)$, а $\tau''_k,\ k < n_1$, — моменти "склеювання" $x_{n_1}(t)$ та $x_k(t)$. Оскільки $\nu_n(t)$ неспадний та обмежений процес, то $\{\tau'_k\}$ та $\{\tau''_k\}$ неспадні послідовності, які із ймовірністю 1 збігаються до нескінченності. Визначимо $\{\sigma_k,\ k \geq 1\}$ як впорядкування по зростанню об'єднання $\{\tau'_k\}$ і $\{\tau''_k\}$. Для фіксованого $T > 0$ позначимо $\sigma'_k = \sigma_k \wedge T,\ k \geq 1$. Далі нехай

$$\delta = [x_{n_1}(0) - x_{n_1-1}(0)] \wedge [x_{n_2+1}(0) - x_{n_2}(0)], \quad \widetilde{\delta} = \frac{\delta}{3} \text{ та}$$

$$\theta_{1,1} = \inf\{t: \ \mu_t([x_{n_1-1}(0) + \widetilde{\delta}, x_{n_1}(0) - \widetilde{\delta}]) > 0\} \wedge \\ \wedge \inf\{t: \ \mu_t([x_{n_2}(0) + \widetilde{\delta}, x_{n_2+1}(0) - \widetilde{\delta}]) > 0\} \wedge T.$$

Розглянемо

$$\mu_t^{1,1} = \sum_{k \in n_1, \ldots, n_2} \delta_{x_k(t)}.$$

Візьмемо $F_{\varphi,m} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_n}$, де $n = \#G$, і перевіримо, що

$$F_{\varphi,m}(\mu_{t\wedge\theta_{1,1}}^{1,1}) - \int\limits_0^{t\wedge\theta_{1,1}} \mathfrak{G}_{\mathcal{H}}(F_{\varphi,m}(\mu_s^{1,1}))ds$$

– мартигнал. Розглянемо функцію $\psi \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}$ таку, що $\psi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ для $x_i \in \left[x_{n_1}(0) - \widetilde{\delta}, x_{n_2}(0) + \widetilde{\delta}\right]$ і $\psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ для

$x_i \notin \left[x_{n_1-1}(0)+\widetilde{\delta}, x_{n_2+1}(0)-\widetilde{\delta}\right]$, де $i=1,\ldots,n$. Маємо, що

$$F_{\varphi,m}(\mu^{1,1}_{t\wedge\theta_{1,1}}) - \int\limits_0^{t\wedge\theta_{1,1}} \mathfrak{G}_{\mathcal{H}}(F_{\varphi,m}(\mu^{1,1}_s))ds =$$

$$= F_{\psi,m}(\mu_{t\wedge\theta_{1,1}}) - \int\limits_0^{t\wedge\theta_{1,1}} \mathfrak{G}_{\mathcal{H}}(F_{\psi,m}(\mu_s))ds$$

є мартингалом.

Далі нехай $\{w_k,\ k\in\mathbb{Z}\}$ — деяка система незалежних стандартних вінеровських процесів, яка не залежить від $\{x_k(\cdot),\ k\in\mathbb{Z}\}$. Перенесемо стандартним чином процеси w_k та $x_k(\cdot),\ k\in\mathbb{Z}$, на один ймовірносний простір і візьмемо

$$(y_k(\cdot))_{k=1,\ldots,n} = \widehat{F}^{a,p}_n((x_k(\theta_{1,1})+w_k(\cdot))_{k=1,\ldots,n}).$$

Тут $a=(1,\ldots,1)$, $p=(1,\ldots,n)$. Тоді випадковий процес

$$\widehat{\mu}_t = \mu^{1,1}_t\,\mathbb{I}_{\{t<\theta_{1,1}\}} + \sum_{k=1}^n \delta_{y_k(t-\theta_{1,1})}\,\mathbb{I}_{\{t\geq\theta_{1,1}\}}$$

є розв'язком $(\mathfrak{G}_{\mathcal{H}_n}, \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_n})$-проблеми мартингалів. Звідси з твердження 3.3.1 сім'я $\{x_{n_1}(\cdot),\ldots,x_{n_2}(\cdot)\}$ задовольняє умови теореми 2.1.1, якщо в 1°)–5°) скрізь замінити t на $t\wedge\theta_{1,1}$. В момент $\theta_{1,1}$ частинки, що стартували із G, міняють своє положення $\mathcal{F}_{\theta_{1,1}}$ вимірним чином. Тепер ці частинки утворюють множину $G_{1,1}$. Використаємо строго марковську властивість вихідного процесу $\{(x_k(t))_{k\in\mathbb{Z}},\ t\geq 0\}$. Частинки, які стартували із $G_{1,1}$, знову ведуть себе відповідним чином до моменту $\theta_{1,2}$, який побудований аналогічно $\theta_{1,1}$ і т.д. Оскільки $x_k(\cdot)$ неперервні процеси і до моменту σ'_1 траєкторії $x_{n_1-1}(\cdot)$, $x_{n_1}(\cdot)$ та $x_{n_2}(\cdot)$, $x_{n_2+1}(\cdot)$ не перетинаються, то $\theta_{1,k}\to\sigma'_1$ при $k\to\infty$. Звідси система $\{x_{n_1}(\cdot),\ldots,x_{n_2}(\cdot)\}$ задовольняє умови 1°)–5°) теореми 2.1.1 до моменту σ'_1. Далі в силу строгої марковської властивості після моменту σ'_1 починаємо наші міркування спочатку. Знову отримаємо, що система $\{x_{n_1}(\cdot), \ldots, x_{n_2}(\cdot)\}$ задовольняє умови 1°)–5°) до моменту σ_2' і т.д. При цьому з ймовірністю 1 тільки скінченна кількість моментів σ_k' відмінна від T. Із наведених міркувань випливає, що траєкторії частинок, які стартували із G, є впорядкованими локальними неперервними мартингалами з потрібними характеристиками. Оскільки G довільне, то такими ж властивостями володіють траєкторії всіх частинок, що стартували із атомів міри μ_0. В силу теореми 2.1.1 розподіл такої системи єдиний. Теорему 3.5.1 доведено. $\square$

Висновки до розділу 3

1. Описано у спеціально побудованому просторі цілочисельних мір $\mathcal{H}$ еволюцію системи частинок, що склеюються і при склеюванні змінюють свою масу, за допомогою мірозначного процесу у цьому просторі.
2. Розв'язана проблема мартингалів у просторі $\mathcal{H}$ для даного мірозначного процесу та встановлено вигляд його генератора.

Побудова фазового простору $\mathcal{H}$, випадкового мірозначного процесу, який задає рух системи важких дифузійних частинок та розв'язок проблеми мартингалів, міститься у роботі автора [15].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано такі основні результати:

- побудовано випадковий процес у просторі $E^n \subset \mathbb{R}^n$, який описує поведінку скінченного числа взаємодіючих дифузійних частинок на прямій, у яких є маса, що впливає на коефіцієнт дифузії. Частинки починають рух зі скінченної множини точок, рухаються незалежно до моменту зустрічі, а потім склеюються і їхня маса сумується, після чого коефіцієнт дифузії змінюється обернено пропорційно кореню квадратному маси. Перевірено марковську властивість такого процесу, знайдено вигляд генератора і розв'язано для нього проблему мартингалів;
- знайдено умови на початковий розподіл маси, що забезпечують існування нескінченної системи дифузійних частинок змінної маси із сингулярною взаємодією;
- вивчено випадок випадкового старту, коли початковий розподіл маси частинок є стаціонарний; показано, що маса, яка переноситься частинками, також має стаціонарний розподіл у довільний фіксований момент часу;
- досліджено асимптотичну поведінку окремої частинки на нескінченності, яка суттєво відрізняється від загальновідомого закону повторного логарифма, та встановлено асимптотичні обмеження на ріст її маси;
- марковський процес, що задає систему дифузійних частинок змінної маси із сингулярною взаємодією, описано за допомогою проблеми мартингалів.

БІБЛІОҐРАФІЯ

1. *Arratia R. A.* Brownian motion on the line / R. A. Arratia // *PhD dissertation, Univ. Wiskonsin, Madison.* — 1979.
2. *Norris J.* Planar aggregation and the coalescing brownian flow / J. Norris, A. Turner // *arXiv:0810.0211v1.*
3. *Hastings M. B.* Laplacian growth as one-dimensional turbulence / M. B. Hastings, L. S. Levitov // *Physics Department.* — 1998. — Vol. 116, no. 1-2.
4. *Dawson D.* Superprocesses with dependent spatial motion and general branching densities / D. Dawson, Z. Li, H. Wang // *Elect. J. Probab.* — 2001. — Vol. 6, no. 25. — Pp. 1–33.
5. *Dawson D. A.* Superprocesses with coalescing brownian spatial motion as large-scale limits / D. A. Dawson, Z. H. Li, X. Zhou // *Journal of Theoretical Probability.* — 2004. — Vol. 17, no. 3. — Pp. 673–692.
6. *Wang H.* State classification for a class of measure-valued branching diffusions in a brownian medium / H. Wang // *Probab. Theory Related Fields.* — 1997. — Vol. 109. — Pp. 39–55.
7. *Wang H.* A class of measure-valued branching diffusions in a random medium / H. Wang // *Stochastic Anal. Appl.* — 1998. — Vol. 16. — Pp. 753–786.
8. *Weinan E.* Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics / E. Weinan, Y. G. Rykov, Y. G. Sinai // *Communications in Mathematical Physics.* — 1996. — Vol. 177. — Pp. 349–380.

9. *Дороговцев А. А.* Мерозначные процессы и стохастические потоки / А. А. Дороговцев. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 289 с.

10. *Le Jan Y.* Flows, coalescence and noise / Y. Le Jan, O. Raimond // *The Annals of Probability.* — 2004. — Vol. 32, no. 2. — Pp. 1247–1315.

11. *Ma Z.* Superprocesses of stochastic flows / Z. Ma, K. Xiang // *The Annals of Probability.* — 2001. — Vol. 29, no. 1. — P. 317–343.

12. *Рюэль Д.* Статестическая механика / Д. Рюэль; Под ред. Р. А. Минлоса. — М.: Мир, 1971. — 367 с.

13. *Конаровский В. В.* О бесконечной системе диффундирующих частиц со склеиванием / В. В. Конаровский // *Теория вероятностей и ее применения.* — 2010. — Т. 55, № 1. — С. 157–167.

14. *Конаровський В. В.* Система дифузійних частинок із склеюванням змінної маси / В. В. Конаровський // *Український математичний журнал.* — 2010. — Т. 62, № 1. — С. 90–103.

15. *Konarovskii V. V.* The martingale problem for a measure-valued process with heavy diffusion particles / V. V. Konarovskii // *Theory of stochastic processes.* — 2011. — Vol. 17, no. 1. — Pp. 50–60.

16. *Хида Т.* Броуновское движение / Т. Хида; Под ред. Ю. А. Розанова. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

17. *Revuz D.* Continuous martingales and brownian motion / D. Revuz, M. Yor. — 3 edition. — New York: Springer, 1999. — 599 pp.

18. *Ватанабе С.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабе, Н. Икеда; Под ред. А. Н. Ширяева. — М.: Наука, 1986. — 448 с.

19. *Pitman J.* Combinatorial Stochastic Processes / J. Pitman; Ed. by J. Picard. — Berlin: Springer, 2006. — 256 pp.

20. *Darling R. W. R.* Constructing nonhomeomorphic stochastic flows / R. W. R. Darling // *Text. Article, Mem. Am. Math. Soc.* — 1978. — Vol. 376. — P. 97.

21. *Kallenberg O.* Foundations of modern probability / O. Kallenberg; Ed. by J. Gani, C. C. Heyde, T. G. Kurtz. — New York: Springer, 1997. — 523 pp.

22. *Ethier S. N.* Markov processes: Characterization and convergence / S. N. Ethier, T. G. Kurtz. — New York: Wiley, 1986. — 529 pp.

23. *Липцер Р. Ш.* Статистика случайных процессов / Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. — М.: Наука, 1974. — 696 с.

24. *Sharp M.* General theory of Markov processes / M. Sharp. — New York: Academic Press, 1988. — 426 pp.

25. *Гилбарг Д.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. С. Трудингер; Под ред. А. К. Гущина. — М.: Наука, 1989. — 465 с.

26. *Ширяев А. Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. — М.: Наука, 1980. — 576 с.

27. *Данфорд Н.* Линейные операторы. Общая теория. / Н. Данфорд, Д. Шварц; Под ред. А. Г. Костюченко. — М.: Издательство иностранной литературы, 1962. — 895 с.

28. *Керстан Й.* Безгранично делимые точечные процессы / Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке; Под ред. Ю. К. Буляева. — М.: Наука, 1982. — 392 с.

29. *Kurtz T.* Lectures on Stochastic Analysis / T. Kurtz. — Madison: Department of Mathematics and Statistics, University of Wisconsin, 2001. — 119 pp.

30. *Булинский А. В.* Теория случайных процессов / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев; Под ред. Ю. К. Буляева. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 408 с.

31. *Dawson D. A.* Measure-valued Markov processes / D. A. Dawson. — Ecole d'ete de probabilites SaintFlour XXI. Lecture Notes in Math, 1993. — 261 pp.

32. *Dorogovtsev A. A.* One brownian stochastic flow / A. A. Dorogovtsev // *Theory of Stochastic Processes.* — 2004. — Vol. 10(26), no. 3-4. — Pp. 21–25.