Система частинок із сингулярною взаємодією для дифузії Вассерштейна

Віталій Конаровський

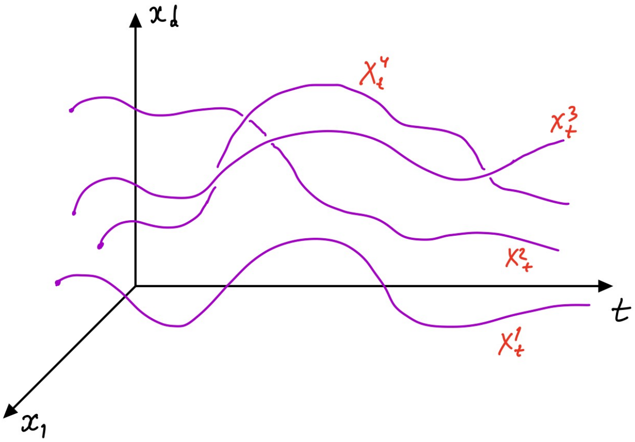
Білефельдський університет та Інститут математики НАНУ

Семінар Інституту математики НАН України — Київ

Зміст доповіді

Скінченна система частинок (із взаємодією)

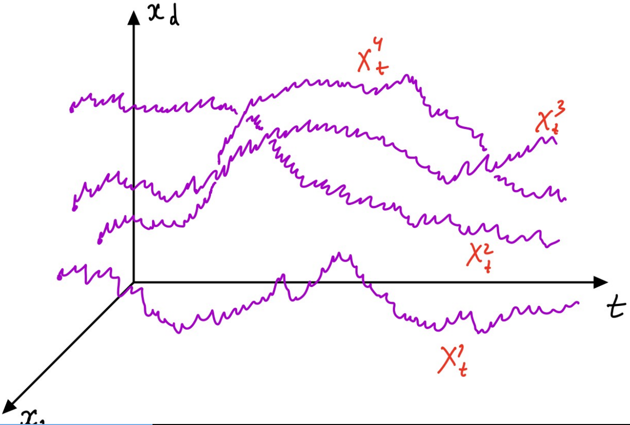
$$dX_t^i = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\nabla V(X_t^i - X_t^j)dt, \quad i = 1, \ldots, n.$$



Скінченна система частинок у випадковому середовищі

$$dX_t^i = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \nabla V(X_t^i - X_t^j)dt + \sqrt{n}dw_t^i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

де w^i – незалежні броунівські рухи.



Еволюція великого числа частинок

Вважаємо, що маса кожної частинки $\frac{1}{n}$ і визначимо

$$\mu_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_t^i}, \quad t \geq 0,$$

де δ_a-дельта міра в точці a.

Еволюція великого числа частинок

Вважаємо, що маса кожної частинки $\frac{1}{n}$ і визначимо

$$\mu_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_t^i}, \quad t \geq 0,$$

де δ_a-дельта міра в точці a.

Надалі описуватимемо еволюцію частинок за допомогою мірозначного процесу μ_t, $t \geq 0$.

Рівняння для μ_t

Взявши довільну функцію $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ і застосувавши до

$$\langle \varphi, \mu_t \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\mu_t(dx) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(X_t^i)$$

формулу Іто отримаємо

$$\langle \varphi, \mu_t \rangle = \langle \varphi, \mu_0 \rangle - \int_0^t \langle \nabla\varphi \cdot (\nabla V * \mu_s), \mu_s \rangle ds$$

$$+\frac{n}{2}\int_0^t \langle \Delta\varphi, \mu_t \rangle + B_s^{\varphi},$$

де B^{φ} – броунівський рух із швидкістю дифузії $\langle \|\nabla\varphi\|^2, \mu_t \rangle$

Рівняння для μ_t

$$\langle \varphi, \mu_t \rangle = \langle \varphi, \mu_0 \rangle - \int_0^t \langle \nabla \varphi \cdot (\nabla V * \mu_s), \mu_s \rangle ds$$

$$+ \frac{n}{2} \int_0^t \langle \Delta \varphi, \mu_t \rangle + B_s^{\varphi},$$

де B^{φ} – броунівський рух із швидкістю дифузії $\langle \|\nabla \varphi\|^2, \mu_t \rangle$

Формально ми отримали рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu_t = \frac{n}{2} \Delta \mu_t + \nabla \cdot (\mu_t \nabla V * \mu_t) + \nabla \cdot \left(\sqrt{\mu_t} \dot{W}_t \right),$$

Рівняння для μ_t

$$\langle \varphi, \mu_t \rangle = \langle \varphi, \mu_0 \rangle - \int_0^t \langle \nabla \varphi \cdot (\nabla V * \mu_s), \mu_s \rangle ds$$

$$+ \frac{n}{2} \int_0^t \langle \Delta \varphi, \mu_t \rangle + B_s^{\varphi},$$

де B^{φ} – броунівський рух із швидкістю дифузії $\langle \|\nabla \varphi\|^2, \mu_t \rangle$

Формально ми отримали рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu_t = \frac{n}{2} \Delta \mu_t + \nabla \cdot \left(\mu_t \nabla \frac{\delta F(\mu_t)}{\delta \mu_t} \right) + \nabla \cdot \left(\sqrt{\mu_t} \dot{W}_t \right),$$

де $F(\mu_t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} V(x-y) \mu_t(dx) \mu_t(dy)$ і $\frac{\delta F(\mu_t)}{\delta \mu_t} = V * \mu_t = \int_{\mathbb{R}^d} V(\cdot - y) \mu(dy)$ – функціональна похідна від потенціалу взаємодії F.

Рівняння Діна-Кавасакі

Рівняння Діна-Кавасакі:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = \frac{\alpha}{2}\Delta\mu_t + \nabla\cdot\left(\mu_t\nabla\frac{\delta F(\mu_t)}{\delta\mu_t}\right) + \nabla\cdot\left(\sqrt{\mu_t}\dot{W}_t\right)$$

Рівняння Діна-Кавасакі

Рівняння Діна-Кавасакі:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = \frac{\alpha}{2}\Delta\mu_t + \nabla\cdot\left(\mu_t\nabla\frac{\delta F(\mu_t)}{\delta\mu_t}\right) + \nabla\cdot\left(\sqrt{\mu_t}\dot{W}_t\right)$$

- μ_t – неперервний мірозначний процес;

Рівняння Діна-Кавасакі

Рівняння Діна-Кавасакі:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = \frac{\alpha}{2}\Delta\mu_t + \nabla\cdot\left(\mu_t\nabla\frac{\delta F(\mu_t)}{\delta\mu_t}\right) + \nabla\cdot\left(\sqrt{\mu_t}\dot{W}_t\right)$$

- μ_t – неперервний мірозначний процес;
- $\frac{\delta F(\nu)}{\delta\nu}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{F(\nu+\varepsilon\delta_x)-F(\nu)}{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(\nu+\varepsilon\delta_x)\Big|_{\varepsilon=0}$ – функціональна похідна F;

Рівняння Діна-Кавасакі

Рівняння Діна-Кавасакі:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = \frac{\alpha}{2}\Delta\mu_t + \nabla\cdot\left(\mu_t\nabla\frac{\delta F(\mu_t)}{\delta\mu_t}\right) + \nabla\cdot\left(\sqrt{\mu_t}\dot{W}_t\right)$$

- μ_t – неперервний мірозначний процес;
- $\frac{\delta F(\nu)}{\delta\nu}(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\frac{F(\nu+\varepsilon\delta_x)-F(\nu)}{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(\nu+\varepsilon\delta_x)\Big|_{\varepsilon=0}$ – функціональна похідна F;
- $\dot{W}$ – білий шум;

Рівняння Діна-Кавасакі

Рівняння Діна-Кавасакі:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = \frac{\alpha}{2}\Delta\mu_t + \nabla\cdot\left(\mu_t\nabla\frac{\delta F(\mu_t)}{\delta\mu_t}\right) + \nabla\cdot\left(\sqrt{\mu_t}\dot{W}_t\right)$$

- μ_t – неперервний мірозначний процес;
- $\frac{\delta F(\nu)}{\delta\nu}(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\frac{F(\nu+\varepsilon\delta_x)-F(\nu)}{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(\nu+\varepsilon\delta_x)\Big|_{\varepsilon=0}$ – функціональна похідна F;
- $\dot{W}$ – білий шум;
- α – додатній параметр.

Проблема існування розв'язків

Рівняння Діна-Кавасакі:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = \frac{\alpha}{2}\Delta\mu_t + \nabla\cdot\left(\mu_t\nabla\frac{\delta F(\mu_t)}{\delta\mu_t}\right) + \nabla\cdot\left(\sqrt{\mu_t}\dot{W}_t\right)$$

Рівняння використовується для моделювання поведінки великого числа частинок із потенціалом взаємодії F у теорії макроскопічних флуктуацій

(K. Kawasaki '94; D. Dean '96; A. Donev, E. Vanden-Eijnden '14, '15;
B. Derrida '16; J. Zimmer '19; B. Gess '19)

Проблема існування розв'язків

Рівняння Діна-Кавасакі:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = \frac{\alpha}{2}\Delta\mu_t + \nabla\cdot\left(\mu_t\nabla\frac{\delta F(\mu_t)}{\delta\mu_t}\right) + \nabla\cdot\left(\sqrt{\mu_t}\dot{W}_t\right)$$

Рівняння використовується для моделювання поведінки великого числа частинок із потенціалом взаємодії F у теорії макроскопічних флуктуацій

(K. Kawasaki '94; D. Dean '96; A. Donev, E. Vanden-Eijnden '14, '15; B. Derrida '16; J. Zimmer '19; B. Gess '19)

F відповідає за взаємодію між частинками

Проблема існування розв'язків

Рівняння Діна-Кавасакі:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = \frac{\alpha}{2}\Delta\mu_t + \nabla\cdot\left(\mu_t\nabla\frac{\delta F(\mu_t)}{\delta\mu_t}\right) + \nabla\cdot\left(\sqrt{\mu_t}\dot{W}_t\right)$$

Рівняння використовується для моделювання поведінки великого числа частинок із потенціалом взаємодії F у теорії макроскопічних флуктуацій

(K. Kawasaki '94; D. Dean '96; A. Donev, E. Vanden-Eijnden '14, '15;
B. Derrida '16; J. Zimmer '19; B. Gess '19)

F відповідає за взаємодію між частинками

Відкрите питання з 2006 р.: Допускає дане рівняння розв'язки? Якщо так, то є єдиність?

Означення розв'язку рівняння Діна-Кавасакі

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = \frac{\alpha}{2}\Delta\mu_t + \nabla\cdot\left(\mu_t\nabla\frac{\delta F(\mu_t)}{\delta\mu_t}\right) + \nabla\cdot\left(\sqrt{\mu_t}\dot{W}_t\right)$$

Означення розв'язку

Неперервний процес μ_t, $t \geq 0$, є розв'язком рівняння Діна-Кавасакі якщо, для кожного $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}\langle\varphi,\mu_t\rangle &= \langle\varphi,\mu_0\rangle + \frac{\alpha}{2}\int_0^t\langle\Delta\varphi,\mu_s\rangle ds\\ &- \int_0^t\left\langle\nabla\varphi\cdot\nabla\frac{\delta F(\mu_s)}{\delta\mu_s},\mu_s\right\rangle ds + B_t^{\varphi},\end{aligned}$$

де B^{φ} – броунівський рух із швидкістю дифузії $\langle\|\nabla\varphi\|^2,\mu_t\rangle$.

Існування та єдиність розв'язків

Нехай X_t^i, $t \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, розв'язок системи рівнянь

$$dX_t^i = -\nabla \frac{\delta F(\mu_t)}{\delta \mu_t}(X_t^i)dt + \sqrt{n} dw_t^i, \quad i = 1, \dots, n$$

де $\mu_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_t^i}$ і w^i – незалежні стандартні броунівські рухи.

Існування та єдиність розв'язків

Нехай X^i_t, $t \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, розв'язок системи рівнянь

$$dX^i_t = -\nabla \frac{\delta F(\mu_t)}{\delta \mu_t}(X^i_t)dt + \sqrt{n} dw^i_t, \quad i = 1, \ldots, n$$

де $\mu_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X^i_t}$ і w^i – незалежні стандартні броунівські рухи.

Як ми бачили раніше для частинного випадку, μ_t, $t \geq 0$, є розв'язком

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = \frac{\alpha}{2}\Delta\mu_t + \nabla \cdot \left(\mu_t \nabla \frac{\delta F(\mu_t)}{\delta \mu_t}\right) + \nabla \cdot \left(\sqrt{\mu_t}\dot{W}_t\right)$$

із $\alpha = n$.

Існування та єдиність розв'язків

Нехай X_t^i, $t \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, розв'язок системи рівнянь

$$dX_t^i = -\nabla \frac{\delta F(\mu_t)}{\delta \mu_t}(X_t^i)dt + \sqrt{n}dw_t^i, \quad i = 1, \ldots, n$$

де $\mu_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_t^i}$ і w^i – незалежні стандартні броунівські рухи.

Як ми бачили раніше для частинного випадку, μ_t, $t \geq 0$, є розв'язком

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = \frac{\alpha}{2}\Delta\mu_t + \nabla \cdot \left(\mu_t \nabla \frac{\delta F(\mu_t)}{\delta \mu_t}\right) + \nabla \cdot \left(\sqrt{\mu_t}\dot{W}_t\right)$$

із $\alpha = n$.

Теорема

(K., T. Lehmann, M. von Renesse / Electron. J. Probab. '19; J. Stat. Phys, '20)

Нехай $\mu_0(\mathbb{R}^d) = 1$, і F – двічі неперервно диференційовна функція по μ і x, яка разом із похідними є обмеженою. Тоді рівняння має розв'язок, який також є єдиним тоді і тільки тоді коли $\alpha = n$ і $\mu_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x^i}$.

Підкоректоване рівняння

Мета: Побудувати модель частинок, яка б задовольняла рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = \Gamma(\mu_t) + \nabla \cdot \left(\sqrt{\mu_t}\dot{W}_t\right)$$

для деякого (сингулярного) Γ.

Зміст доповіді

Відстань Вассерштайна

Нехай $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ — простір усіх ймовірнісних мір ρ на $\mathbb{R}^d$ з

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 \rho(dx) < \infty.$$

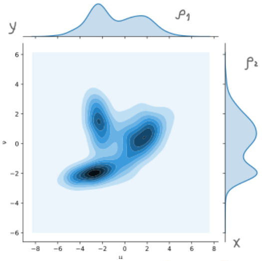
Відстань Вассерштайна

Нехай $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ — простір усіх ймовірнісних мір ρ на $\mathbb{R}^d$ з

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 \rho(dx) < \infty.$$

Для $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ визначимо **відстань Васерштейна** за формулою

$$\mathcal{W}_2^2(\rho_1, \rho_2) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^{2d}} \|x - y\|^2 \chi(dx, dy) : \quad \begin{array}{l} \chi(\cdot \times \mathbb{R}^d) = \rho_1, \\ \chi(\mathbb{R}^d \times \cdot) = \rho_2 \end{array} \right\}$$



Wikipedia

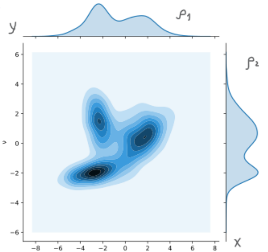
Відстань Вассерштайна

Нехай $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ — простір усіх ймовірнісних мір ρ на $\mathbb{R}^d$ з

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 \rho(dx) < \infty.$$

Для $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ визначимо **відстань Вассерштейна** за формулою

$$\mathcal{W}_2^2(\rho_1, \rho_2) = \inf\left\{ \int_{\mathbb{R}^{2d}} \|x - y\|^2 \chi(dx, dy) : \begin{array}{l} \chi(\cdot \times \mathbb{R}^d) = \rho_1, \\ \chi(\mathbb{R}^d \times \cdot) = \rho_2 \end{array} \right\}$$
$$= \inf\left\{ \mathbb{E}\|\xi_1 - \xi_2\|^2 : \quad \xi_i \sim \rho_i \right\}$$



Wikipedia

Відстань Вассерштайна

Нехай $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ — простір усіх ймовірнісних мір ρ на $\mathbb{R}^d$ з

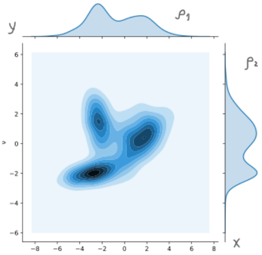
$$\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 \rho(dx) < \infty.$$

Для $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ визначимо **відстань Вассерштейна** за формулою

$$\mathcal{W}_2^2(\rho_1, \rho_2) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^{2d}} \|x - y\|^2 \chi(dx, dy) : \begin{array}{l} \chi(\cdot \times \mathbb{R}^d) = \rho_1, \\ \chi(\mathbb{R}^d \times \cdot) = \rho_2 \end{array} \right\}$$
$$= \inf \left\{ \mathbb{E}\|\xi_1 - \xi_2\|^2 : \quad \xi_i \sim \rho_i \right\}$$

Твердження

$(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d), \mathcal{W}_2)$ є повним сепарабельним метричним простором.



#Ріманова структура на просторі Вассерштейна

Метрика Вассерштейна на $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ формула Бенаму-Бреньє:

$$\mathcal{W}_2^2(\rho^1, \rho^2) := \inf \left\{ \mathbb{E}|\xi^1 - \xi^2|^2 : \ \xi^i \sim \rho^i \right\}$$

$$= \inf \left\{ \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla \Phi(t,x)\|^2 \rho(t,x) dx dt : \begin{array}{r} \partial_t \rho(t,x) + \nabla \cdot (\rho(t,x) \nabla \Phi(t,x)) = 0, \\ \rho(0,x) = \rho^1, \ \rho(1,x) = \rho^2(x) \end{array} \right\}$$

#Ріманова структура на просторі Вассерштейна

Метрика Вассерштейна на $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ формула Бенаму-Бреньє:

$$\mathcal{W}_2^2(\rho^1, \rho^2) := \inf\left\{\mathbb{E}|\xi^1 - \xi^2|^2 : \ \xi^i \sim \rho^i\right\}$$

$$= \inf\left\{\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla\Phi(t,x)\|^2 \rho(t,x)dxdt : \begin{array}{r} \partial_t\rho(t,x) + \nabla\cdot(\rho(t,x)\nabla\Phi(t,x)) = 0, \\ \rho(0,x) = \rho^1, \ \rho(1,x) = \rho^2(x) \end{array}\right\}$$

Визначимо дотичний простір в ρ за допомогою

$$T_\rho\mathcal{P}_+ = \left\{\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \ \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x)dx = 0\right\}$$

Зауважимо, що $\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t\rho(t,x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n} 1\nabla\cdot(\rho(t,x)\nabla\Phi(t,x))\, dx = 0$ для хороших полів Φ

Рiманова структура на просторi Вассерштейна

Метрика Вассерштейна на $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ формула Бенаму-Бреньє:

$$\mathcal{W}_2^2(\rho^1,\rho^2) := \inf\left\{\mathbb{E}|\xi^1-\xi^2|^2 :\ \xi^i\sim\rho^i\right\}$$

$$= \inf\left\{\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla\Phi(t,x)\|^2\rho(t,x)dxdt :\ \begin{array}{r}\partial_t\rho(t,x)+\nabla\cdot(\rho(t,x)\nabla\Phi(t,x))=0,\\ \rho(0,x)=\rho^1,\ \rho(1,x)=\rho^2(x)\end{array}\right\}$$

Визначимо дотичний простір в ρ за допомогою

$$T_\rho\mathcal{P}_+ = \left\{\sigma\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) :\ \int_{\mathbb{R}^n}\sigma(x)dx=0\right\}$$

Зауважимо, що $\int_{\mathbb{R}^n}\partial_t\rho(t,x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n}1\nabla\cdot(\rho(t,x)\nabla\Phi(t,x))\,dx = 0$ для хороших полів Φ

Визначивши метричний тензор

$$g_\rho(\sigma_1,\sigma_2)=\int_{\mathbb{R}^n}\nabla\Phi_1(x)\cdot\nabla\Phi_2(x)\rho(x)dx,\quad \text{для}\quad \sigma_i=-\Delta_\rho\Phi_i=-\nabla\cdot(\rho\nabla\Phi_i),$$

отримаємо (Otto / Comm. Partial Differential Equations, '01)

$$\mathcal{W}_2^2(\rho^1,\rho^2)=\inf\left\{\int_0^1 g_{\rho_t}(\dot\rho_t,\dot\rho_t)dt :\ \rho_0=\rho^1,\ \rho_1=\rho^2,\quad \dot\rho_t\in T_{\rho_t}\mathcal{P}_2\right\}$$

Градієнт і рівняння Діна-Кавасакі

Градієнт узгоджений з метрикою Вассерштейна:

$$\operatorname{grad}_{\mathcal{W}} F(\rho) = -\nabla \cdot \left(\rho \nabla \frac{\delta}{\delta \rho} F(\rho) \right).$$

Градієнт і рівняння Діна-Кавасакі

Градієнт узгоджений з метрикою Вассерштейна:

$$\mathrm{grad}_{\mathcal{W}} F(\rho) = -\nabla \cdot \left(\rho \nabla \frac{\delta}{\delta \rho} F(\rho) \right).$$

У такому випадку розв'язок рівняння

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = \alpha \Delta \mu_t$$

є градієнтним потоком у просторі Вассерштейна:

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = -\,\mathrm{grad}_{\mathcal{W}}[\alpha E(\mu_t)],$$

де $E(\rho) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) \ln \rho(x) dx$ – ентропія,
(Otto / Comm. Partial Differential Equations, '01)

Градієнт і рівняння Діна-Кавасакі

Градієнт узгоджений з метрикою Вассерштейна:

$$\mathrm{grad}_{\mathcal{W}}\, F(\rho) = -\nabla \cdot \left(\rho \nabla \frac{\delta}{\delta \rho} F(\rho) \right).$$

У такому випадку розв'язок рівняння

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = \alpha \Delta \mu_t + \nabla \cdot \left(\mu_t \nabla \frac{\delta F(\mu_t)}{\delta \mu_t} \right) + \nabla \cdot \left(\sqrt{\mu_t} \dot{W}_t \right)$$

є градієнтним потоком у просторі Вассерштейна:

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = -\,\mathrm{grad}_{\mathcal{W}} [\alpha E(\mu_t) + F(\mu_t)] + \dot{B}_t,$$

де $E(\rho) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) \ln \rho(x) dx$ – ентропія, і для довільної хорошої G квадратична варіація $G(\mu_t)$ рівна

$$\int_0^t \left\langle \left\| \nabla \frac{\partial G(\mu_s)}{\partial \mu_s} \right\|^2, \mu_s \right\rangle ds = \int_0^t g_{\mu_s} (\mathrm{grad}_{\mathcal{W}}\, G(\mu_s), \mathrm{grad}_{\mathcal{W}}\, G(\mu_s)) ds.$$

Асимптотичні властивості броунівського руху

Асимптотична властивість для фундаментального розв'язку рівняння теплопровідності

$$p(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}} \sim e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}}, \quad t \to 0+ .$$

Асимптотичні властивості броунівського руху

Асимптотична властивість для фундаментального розв'язку рівняння теплопровідності

$$p(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}} \sim e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}}, \quad t \to 0+\,.$$

Узагальнення

- Рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами в $\mathbb{R}^n$ (Varadhan (CPAM '67))
- Гладкий рімановий многовид з обмеженою кривизною Річчі (P. Li and S.-T. Yau (Acta Math. '86))
- Рімановий многовид без обмежень на кривизну (J. Norris (Acta Math. 97))
- Нескінченновимірний випадок теплового ядра, породженого формою Діріхле (J. Ramírez (CPAM '01, Ann. Prob '03))

Асимптотичні властивості броунівського руху

Асимптотична властивість для фундаментального розв'язку рівняння теплопровідності

$$p(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}} \sim e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}}, \quad t \to 0+\,.$$

Узагальнення

- Рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами в $\mathbb{R}^n$ (Varadhan (CPAM '67))
- Гладкий рімановий многовид з обмеженою кривизною Річчі (P. Li and S.-T. Yau (Acta Math. '86))
- Рімановий многовид без обмежень на кривизну (J. Norris (Acta Math. 97))
- Нескінченновимірний випадок теплового ядра, породженого формою Діріхле (J. Ramírez (CPAM '01, Ann. Prob '03))

Наслідок

Якщо B_t, $t \geq 0$ – броунівський рух на рімановому многовиді, то

$$\mathbb{P}_x\{B_t = y\} \sim e^{-\frac{d^2(x,y)}{2t}}, \quad t \to 0+,$$

де d – ріманова відстань.

Основна мета

Побудувати розв'язок рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = \Gamma(\mu_t) + \nabla \cdot \left(\sqrt{\mu_t}\dot{W}_t\right)$$

для деякого (сингулярного) Γ для якого має місце формула Варадана

$$\mathbb{P}\{\mu_t = \nu\} \sim e^{-\frac{\mathcal{W}_2^2(\mu_0,\nu)}{2t}}, \quad t \to 0+,$$

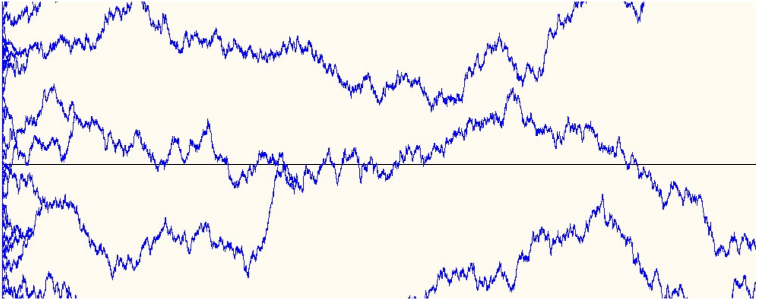
з метрикою Вассерштейна $\mathcal{W}_2$.

Зміст доповіді

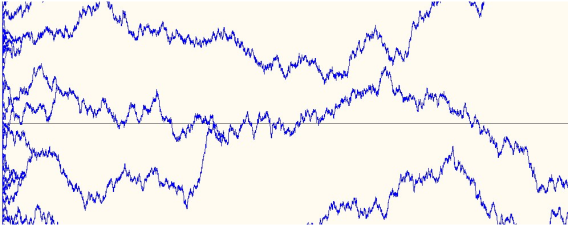
Система частинок зі склеюванням: потік Арратья

Потік Арратья на $\mathbb{R}$ (R. Arratia '79)

- Броунівські частинки стартують з кожної точки інтервалу або всієї числової прямої;
- рухаються незалежно і після зустрічі склеюються.



Математичний опис потоку Арратья



$X(u,t)$ – положення частинки в момент часу t, що стартує з точки u.

1. $X(u,0) = u$;
2. $X(u,\cdot)$ – броунівський рух на $\mathbb{R}$;
3. $X(u,t) \leq X(v,t)$, $u < v$
4. $\langle X(u,\cdot), X(v,\cdot)\rangle_t = \int_0^t \mathbb{I}_{\{X(u,s)=X(v,s)\}} ds$.

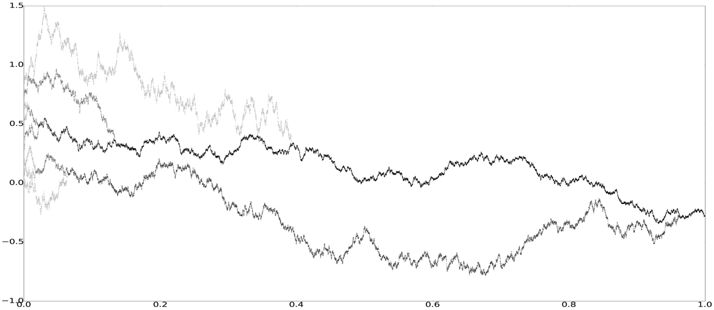
Потік Арратья і його узагальнення:

- **Потік Арратья виникає як границя при шкалювання різних моделей**
  - true self-repelling motion (B.Tóth and W. Werner (PTRF '98))
  - isotropic stochastic flows of homeomorphisms in $\mathbb{R}$ (V. Piterbarg (Ann. Prob. '98))
  - Hastings-Levitov planer aggregation models (J. Norris, A. Turner (Comm. Math. Phys. '12)), ...
- **Подальші дослідження потоку Арратья:**
  - властивості породженої σ-алгебри (B. Tsirelson (Probab. Surv. '04))
  - n-точковий рух (R. Tribe, O.V. Zaboronski (EJP '04, Comm. Math. Phys. '06))
  - принцип великих відхилень (A. Dorogovtsev, O. Ostapenko (Stoch. Dyn. '10)), etc...
- **Узагальнення:**
  - броунівська сітка (C. M. Newman et al. (Ann. Prob. '04), R. Sun, J.M Swart (MAMS, '14))
  - не броунівські частинки зі склеюванням (S. Evans et al. (PTRF, '13))
  - стохастичні потоки ядер (Y. Le Jan and O. Raimond (Ann. Prob. '04))

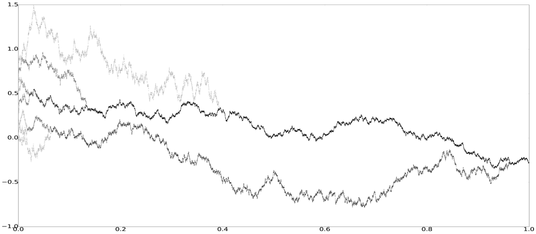
Модифікований масивний потік Арратья

Модифікований масивний потік Арратья $\mathbb{R}$ (K. / Ann. Prob. '17)

- Броунівські частинки стартують з точок із масами;
- вони рухаються незалежно і після зустрічі клеюються;
- частинки сумують свої маси після зустрічі, а швидкість дифузії обернено пропорційна масі.



Математичний опис



$Y(u,t)$ – позиція частинки в момент часу t з міткою $u \in [0,1]$

1. $Y(u,0) = u$;
2. $Y(u,\cdot)$ – неперервний мартингал;
3. $Y(u,t) \le Y(v,t)$, $u < v$;
4. $\langle Y(u,\cdot), Y(v,\cdot)\rangle_t = \int_0^t \frac{\mathbb{I}_{\{Y(u,s)=Y(v,s)\}}}{m(u,s)} ds$,
   $m(u,s) = \mathrm{Leb}\{w : \ Y(w,s) = Y(u,s)\}$.

(K. / Ann. Prob. '17)

Зв'язок з геометрією простору Вассерштейна

Теорема (K., Renesse / Comm. Pure Appl. Math. '19)

Процес $\mu_t = \mathrm{Leb} \circ Y^{-1}(\cdot, t)$, $t \geq 0$, який описує еволюцію мас частинок у модифікованому масивному потоці Арратья, розв'язує рівняння

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta \mu_t^* + \nabla \cdot (\sqrt{\mu_t}\dot{W}_t),$$

з $\mu_t^* = \sum_{x \in \mathrm{supp}\, \mu_t} \delta_x$ та білим шумом dW_t та задовольняє формулу Варадана

$$\mathbb{P}\{\mu_t = \nu\} \sim e^{-\frac{\mathcal{W}_2^2(\mu_0, \nu)}{2t}}, \quad t \to 0+,$$

з квадратичною відстанню Вассерштейна $\mathcal{W}_2$ у $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Подальші властивості модифікованого потоку Арратья

1. Асимптотична поведінка траєкторій окремих частинок: для всіх $\varepsilon > 0$ та $u \in [0, 1]$

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{t\to 0} \frac{|Y(u,t)-u|}{\sqrt[3]{t}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}+\epsilon}} = 0\right\} = \mathbb{P}\left\{\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{|Y(u,t)-u|}{\sqrt[3]{t}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}-\epsilon}} = +\infty\right\} = 1.$$

(K. / Electron. J. Probab. '17)

2. Асимптотична поведінка траєкторій окремих частинок в нулі: для всіх $\varepsilon > 0$ та $u \in [0, 1]$

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{t\to 0} \frac{m(u,t)}{\sqrt[3]{t}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{1+\epsilon}} = 0\right\} = \mathbb{P}\left\{\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{m(u,t)}{\sqrt[3]{t}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1-\epsilon}} = +\infty\right\} = 1.$$

(K. / Electron. J. Probab. '17)

3. Модифікований потік Арратья виникає як умовний розподіл незалежних броунівських частинок при умові, що вони склеюються.
(K., Marx / '21)

Зміст доповіді

Взаємодія з липким відбиттям

Чи можна замінити склеювання іншим типом взаємодії, щоб мати ту ж саму формулу Варадана та рівняння Діна-Кавасакі, але отримати зворотну в часі динаміку?

Взаємодія з липким відбиттям

Чи можна замінити склеювання іншим типом взаємодії, щоб мати ту ж саму формулу Варадана та рівняння Діна-Кавасакі, але отримати зворотну в часі динаміку?

Нагадаємо, що система частинок зі склеюванням Y задовольняє наступним властивостям:

1. $Y(u,0) = u$, $u \in [0,1]$
2. $Y(u,\cdot)$ – неперервний мартингал
3. $Y(u,t) \le Y(v,t)$, $u < v$;
4. $\langle Y(u,\cdot), Y(v,\cdot)\rangle_t = \int_0^t \frac{\mathbb{I}_{\{Y(u,s)=Y(v,s)\}}}{m(u,s)} ds$, $m(u,s) = \mathrm{Leb}\{w : Y(w,t) = Y(u,t)\}$.

$Y(u,t)$ – позиція частинки в момент часу t, що стартував з u

Взаємодія з липким відбиттям

Чи можна замінити склеювання іншим типом взаємодії, щоб мати ту ж саму формулу Варадана та рівняння Діна-Кавасакі, але отримати зворотну в часі динаміку?

Нагадаємо, що система частинок зі склеюванням Y задовольняє наступним властивостям:

1. $Y(u,0) = g(u)$, $u \in [0,1]$, де $g \uparrow$;
2. $Y(u,\cdot)$ – неперервний мартингал
3. $Y(u,t) \leq Y(v,t)$, $u < v$;
4. $\langle Y(u,\cdot), Y(v,\cdot)\rangle_t = \int_0^t \frac{\mathbb{I}_{\{Y(u,s)=Y(v,s)\}}}{m(u,s)} ds$,
   $m(u,s) = \mathrm{Leb}\{w : Y(w,t) = Y(u,t)\}$.

$Y(u,t)$ – позиція частинки в момент часу t, що стартував з $g(u)$ (початковий розподіл маси частинок$= \mathrm{Leb} \circ g^{-1}$) .

Взаємодія з липким відбиттям

Чи можна замінити склеювання іншим типом взаємодії, щоб мати ту ж саму формулу Варадана та рівняння Діна-Кавасакі, але отримати зворотну в часі динаміку?

Нагадаємо, що система частинок зі склеюванням Y задовольняє наступним властивостям:

1. $Y(u,0) = g(u)$, $u \in [0,1]$, де $g \uparrow$;
2. $Y(u,\cdot) - \int_0^t \left(\xi(u) - \frac{1}{m(u,s)} \int_{\pi(u,s)} \xi(r)dr\right) ds$ – неперервний мартингал, де $\pi(u,t) = \{v : \ Y(u,t) = Y(v,t)\}$ та $\xi \uparrow$ – **потенціал взаємодії;**
3. $Y(u,t) \leq Y(v,t)$, $u < v$;
4. $\langle Y(u,\cdot), Y(v,\cdot)\rangle_t = \int_0^t \frac{\mathbb{I}_{\{Y(u,s)=Y(v,s)\}}}{m(u,s)} ds$, $m(u,s) = \mathrm{Leb}\{w : Y(w,t) = Y(u,t)\}$.

$Y(u,t)$ – позиція частинки в момент часу t, що стартував з $g(u)$ (початковий розподіл маси частинок$= \mathrm{Leb} \circ g^{-1}$) .

Роль функції ξ

Зауважимо, що $Y(u,\cdot) - \int_0^t \left(\xi(u) - \frac{1}{m(u,s)} \int_{\pi(u,s)} \xi(r)dr\right) ds$ – неперервний мартингал, де $\pi(u,t) = \{v : \ Y(u,t) = Y(v,t)\}$ та $\xi \uparrow$.

Роль функції ξ

Зауважимо, що $Y(u,\cdot) - \int_0^t \left(\xi(u) - \frac{1}{m(u,s)} \int_{\pi(u,s)} \xi(r)dr\right) ds$ – неперервний мартингал, де $\pi(u,t) = \{v : \ Y(u,t) = Y(v,t)\}$ та $\xi \uparrow$.

- Якщо $\xi = 0$, то частинки склеюються.

Роль функції ξ

Зауважимо, що $Y(u,\cdot) - \int_0^t \left(\xi(u) - \frac{1}{m(u,s)} \int_{\pi(u,s)} \xi(r)dr\right) ds$ – неперервний мартингал, де $\pi(u,t) = \{v : \ Y(u,t) = Y(v,t)\}$ та $\xi \uparrow$.

- Якщо $\xi = 0$, то частинки склеюються.
- Якщо ξ константа на $\pi(u,t)$, то частинка u немає дрейфу.

Роль функції ξ

Зауважимо, що $Y(u,\cdot) - \int_0^t \left(\xi(u) - \frac{1}{m(u,s)} \int_{\pi(u,s)} \xi(r)dr\right) ds$ – неперервний мартингал, де $\pi(u,t) = \{v : \ Y(u,t) = Y(v,t)\}$ та $\xi \uparrow$.

- Якщо $\xi = 0$, то частинки склеюються.
- Якщо ξ константа на $\pi(u,t)$, то частинка u немає дрейфу.
- Якщо $\xi(u) = \xi(v)$, тоді частинки u та v склеюються після зустрічі: тому, що дрейф $Y(u,\cdot)$ і $Y(v,\cdot)$ в момент часу s рівні після зустрічі

$$\xi(u) - \frac{1}{m(u,s)} \int_{\pi(u,s)} \xi(u)du = \xi(v) - \frac{1}{m(v,s)} \int_{\pi(v,s)} \xi(r)dr,$$

оскільки $\pi(u,s) = \pi(v,s)$ для $Y(u,s) = Y(v,s)$.

Роль функції ξ

Зауважимо, що $Y(u,\cdot) - \int_0^t \left(\xi(u) - \frac{1}{m(u,s)} \int_{\pi(u,s)} \xi(r)dr\right) ds$ – неперервний мартингал, де $\pi(u,t) = \{v : \ Y(u,t) = Y(v,t)\}$ та $\xi \uparrow$.

- Якщо $\xi = 0$, то частинки склеюються.
- Якщо ξ константа на $\pi(u,t)$, то частинка u немає дрейфу.
- Якщо $\xi(u) = \xi(v)$, тоді частинки u та v склеюються після зустрічі: тому, що дрейф $Y(u,\cdot)$ і $Y(v,\cdot)$ в момент часу s рівні після зустрічі

$$\xi(u) - \frac{1}{m(u,s)} \int_{\pi(u,s)} \xi(u)du = \xi(v) - \frac{1}{m(v,s)} \int_{\pi(v,s)} \xi(r)dr,$$

оскільки $\pi(u,s) = \pi(v,s)$ для $Y(u,s) = Y(v,s)$.

$\rightsquigarrow$ Якщо $g(u) = g(v)$, $\xi(u) = \xi(v)$, то $Y(u,\cdot) = Y(v,\cdot)$.

Роль функції ξ

Зауважимо, що $Y(u,\cdot) - \int_0^t \left(\xi(u) - \frac{1}{m(u,s)} \int_{\pi(u,s)} \xi(r)dr\right) ds$ – неперервний мартингал, де $\pi(u,t) = \{v : \ Y(u,t) = Y(v,t)\}$ та $\xi \uparrow$.

- Якщо $\xi = 0$, то частинки склеюються.
- Якщо ξ константа на $\pi(u,t)$, то частинка u немає дрейфу.
- Якщо $\xi(u) = \xi(v)$, тоді частинки u та v склеюються після зустрічі: тому, що дрейф $Y(u,\cdot)$ і $Y(v,\cdot)$ в момент часу s рівні після зустрічі

$$\xi(u) - \frac{1}{m(u,s)} \int_{\pi(u,s)} \xi(u)du = \xi(v) - \frac{1}{m(v,s)} \int_{\pi(v,s)} \xi(r)dr,$$

оскільки $\pi(u,s) = \pi(v,s)$ для $Y(u,s) = Y(v,s)$.

$\rightsquigarrow$ Якщо $g(u) = g(v)$, $\xi(u) = \xi(v)$, то $Y(u,\cdot) = Y(v,\cdot)$.

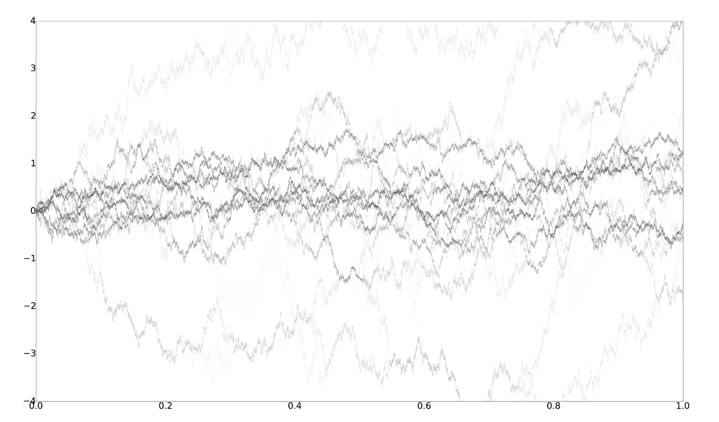
$\rightsquigarrow$ Якщо $g = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{I}_{\pi_i}$, $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathbb{I}_{\pi_i}$, то

$$Y(u,t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \mathbb{I}_{\pi_i}(u).$$

Ро...

За...

ма...



$$g(u) = 0, \quad \xi(u) = u, \quad u \in (0,1)$$

Модель подібна до потоку Ховітта-Уоррена. Основна відмінність полягає в тому, що в нашому випадку частинки змінюють швидкість дифузії. (Howitt, Warren / Ann. Probab. '09; Schertzer, Sun, Swart / Mem. Amer. Math. Soc. '14)

Існування системи частинок

Теорема (K. / Ann. Inst. H. Poincaré, '22+)

Нехай $g, \xi : [0,1] \to \mathbb{R}$ неспадні $\frac{1}{2}+$-неперервні за Гельдером функції. Тоді існує система неперервних процесів $Y(u,\cdot)$, $u \in [0,1]$, така, що

1. $Y(u,0) = g(u)$
2. $Y(u,\cdot) - \int_0^t \left(\xi(u) - \frac{1}{m(u,s)} \int_{\pi(u,s)} \xi(r)dr \right) ds$ – неперервний мартингал, де $\pi(u,t) = \{v : \ Y(u,t) = Y(v,t)\}$, $m(u,s) = \mathrm{Leb}\{w : Y(w,t) = Y(u,t)\}$;
3. $Y(u,t) \leq Y(v,t)$, $u < v$;
4. $\langle Y(u,\cdot), Y(v,\cdot)\rangle_t = \int_0^t \frac{\mathbb{I}_{\{Y(u,s)=Y(v,s)\}}}{m(u,s)} ds$.

Існування системи частинок

Теорема (K. / Ann. Inst. H. Poincaré, '22+)

Нехай $g, \xi : [0,1] \to \mathbb{R}$ неспадні $\frac{1}{2}+$-неперервні за Гельдером функції. Тоді існує система неперервних процесів $Y(u,\cdot)$, $u \in [0,1]$, така, що

1. $Y(u,0) = g(u)$
2. $Y(u,\cdot) - \int_0^t \left(\xi(u) - \frac{1}{m(u,s)} \int_{\pi(u,s)} \xi(r)dr \right) ds$ – неперервний мартингал, де $\pi(u,t) = \{v : \ Y(u,t) = Y(v,t)\}$, $m(u,s) = \mathrm{Leb}\{w : Y(w,t) = Y(u,t)\}$;
3. $Y(u,t) \leq Y(v,t)$, $u < v$;
4. $\langle Y(u,\cdot), Y(v,\cdot) \rangle_t = \int_0^t \frac{\mathbb{I}_{\{Y(u,s)=Y(v,s)\}}}{m(u,s)} ds$.

Єдиність залишається важливою відкритою проблемою

СДР в $L_2^{\uparrow}$ для системи частинок

Існує білий шум такий, що

$$dY(u,t) = \frac{1}{m(u,t)} \int_{\pi(u,t)} W(dr,dt) + \left(\xi(u) - \frac{1}{m(u,t)} \int_{\pi(u,t)} \xi(r)dr \right) dt.$$

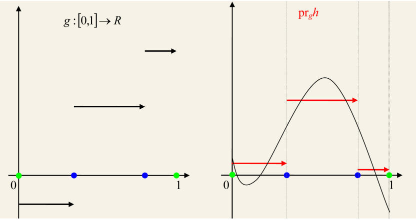
СДР в $L_2^{\uparrow}$ для системи частинок

Існує білий шум такий, що

$$dY(u,t) = \frac{1}{m(u,t)} \int_{\pi(u,t)} W(dr,dt) + \left(\xi(u) - \frac{1}{m(u,t)} \int_{\pi(u,t)} \xi(r)dr \right) dt.$$

Нехай pr_g – **проекція** в $L_2[0,1]$ на

$$L_2(g) = \{ f : f \quad - \quad \sigma(g)\text{-вимірна} \}$$



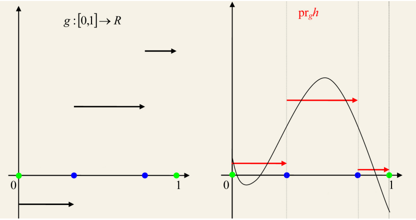
СДР в $L_2^{\uparrow}$ для системи частинок

Існує білий шум такий, що

$$dY(u,t) = \frac{1}{m(u,t)} \int_{\pi(u,t)} W(dr,dt) + \left(\xi(u) - \frac{1}{m(u,t)} \int_{\pi(u,t)} \xi(r) dr \right) dt.$$

Нехай pr_g – **проекція** в $L_2[0,1]$ на

$$L_2(g) = \{ f : f \quad - \quad \sigma(g)\text{-вимірна} \}$$

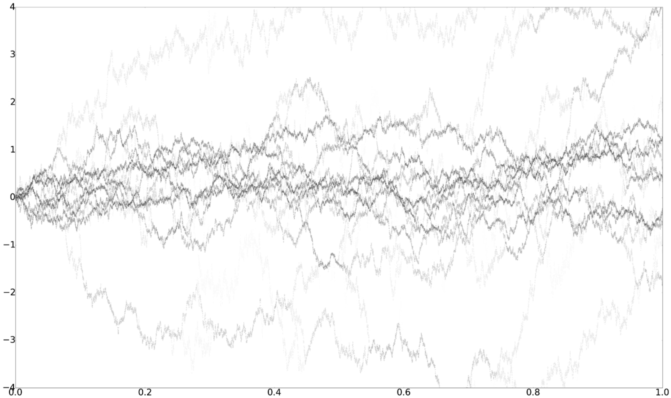


Тоді $Y_t := Y(\cdot, t) \in L_2^{\uparrow}$ розв'язує рівняння

$$dY_t = \mathrm{pr}_{Y_t} dW_t + (\xi - \mathrm{pr}_{Y_t} \xi) dt.$$

Кількість частинок

Як багато різних частинок містить система в момент часу t?



$$g(u) = 0, \quad \xi(u) = u, \quad u \in (0, 1)$$

Скінченне число частинок

$$dY_t = \mathrm{pr}_{Y_t} dW_t + (\xi - \mathrm{pr}_{Y_t} \xi)dt.$$

Звідси для мартингальної частини $M_t = \int_0^t \mathrm{pr}_{Y_s} dW_s$ маємо

$$\mathbb{E}\|M_t\|_t^2 = \int_0^t \mathbb{E}\| \mathrm{pr}_{Y_s} \|_{HS}^2 ds = \int_0^t \mathbb{E}N(s)ds < \infty,$$

де $N(t)$ – число різних частинок в момент часу t.

Нескінченне число частинок

Теорема (K. / Theory Stoch. Process., '20)

Нехай ξ приймає нескінченну кількість різних значень. Тоді з ймовірністю 1 існує щільна (випадкова) множина $R \subset [0, \infty)$ така, що $N(t) = +\infty$, $\forall t \in R$.

Інваріантна міра для системи частинок

Визначимо σ-скінченну міру на $L_2^{\uparrow}$ наступним чином

$$\Xi = \sum_{n=1}^{\infty} \Xi^n,$$

де Ξ^n – розподіл $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{[q_{k-1},q_k)} x_k$ у якому точки стрибків $(q_1,\ldots,q_{n-1})$ розподілені за

$$d\nu_\xi^n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (q_k - q_{k-1}) d\xi(q_1)\ldots\xi(q_{n-1}), \quad \text{on} \quad 0 = q_0 < q_1 < \cdots < q_n = 1$$

і значення стрибків $(x_1,\ldots,x_n)$ рівномірно розподілені на $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$.

Інваріантна міра для системи частинок

Визначимо σ-скінченну міру на $L_2^{\uparrow}$ наступним чином

$$\Xi = \sum_{n=1}^{\infty} \Xi^n,$$

де Ξ^n – розподіл $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{[q_{k-1}, q_k)} x_k$ у якому точки стрибків $(q_1, \ldots, q_{n-1})$ розподілені за

$$d\nu_\xi^n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (q_k - q_{k-1}) d\xi(q_1) \ldots \xi(q_{n-1}), \quad \text{on} \quad 0 = q_0 < q_1 < \cdots < q_n = 1$$

і значення стрибків $(x_1, \ldots, x_n)$ рівномірно розподілені на $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

Можна показати, що $\operatorname{supp} \Xi = L_2^{\uparrow}(\xi) = \{f \in L_2^{\uparrow} : \ f \ - \ \sigma(\xi)\text{-вимірна}\}$

Реверсивна система частинок зі склеюванням

Теорема (K., Renesse / ’17)

Для довільної неспадної неперервної справа функції ξ існує марківський процес Y в $L_2^{\uparrow}(\xi)$ такий, що

- Ξ – інваріантна міра для Y.
- Y_t є розв'язком

$$dY_t = \mathrm{pr}_{Y_t} dW_t + (\xi - \mathrm{pr}_{Y_t} \xi)dt \quad \text{in } L_2^{\uparrow}[0,1].$$

- Процес $\mu_t = \mathrm{Leb} \circ Y^{-1}(\cdot, t)$, що описує еволюцію маси частинок, є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = \frac{1}{2}\Delta\mu_t^* + \nabla \cdot (\sqrt{\mu_t}\dot{W}_t), \quad \text{in } \mathcal{P}_2(\mathbb{R}),$$

  де $\mu_t^* = \sum_{x \in \mathrm{supp}\, \mu_t} \delta_x$.
- $\mathbb{P}\{\mu_t = \nu\} \sim e^{-\frac{\mathcal{W}_2(\mu_0, \nu)}{2t}}, \quad t \to +0.$

Список літератури

1. **Рівняння Діна-Кавасакі**

- *Konarovskyi*, *Lehmann*, *Renesse*, Dean-Kawasaki dynamics: Ill-posedness vs. Triviality, *Electron. Comm. Probab. (2019)*
- *Konarovskyi*, *Lehmann*, *Renesse*, Dean-Kawasaki dynamics with smooth drift potential, *J. Stat. Phys. (2020)*

2. **Система частинок зі склеюванням**

- *Konarovskyi*, A system of coalescing diffusion particles on $\mathbb{R}$, *Ann. Prob. (2017)*
- *Konarovskyi*, On asymptotic behavior of the modified Arratia flow, *Electron. J. Probab. (2017)*
- *Konarovskyi*, *Marx*, On Conditioning Brownian Particles to Coalesce, *arXiv:2106.00080*

3. **Принцип великих відхилень і формула Варадана**

- *Konarovskyi*, *Renesse*, Modified Massive Arratia flow and Wasserstein diffusion, *Comm. Pure Appl. Math. (2019)*

4. **Система частинок з липким відбиттям**

- *Konarovskyi*, Coalescing-Fragmentating Wasserstein Dynamics: particle approach, *Ann. Inst. H. Poincaré, (2022+)*
- *Konarovskyi*, *Renesse*, Reversible Coalescing-Fragmentating Wasserstein Dynamics on the Real Line, *arXiv:1709.02839*
- *Konarovskyi*, On Number of Particles in Coalescing-Fragmentating Wasserstein Dynamics, *Theory Stoch. Process. (2020)*